

(美) R·狄斯贝格尔 著
伍登祥 译

数学瑰宝

第二辑

四川教育出版社

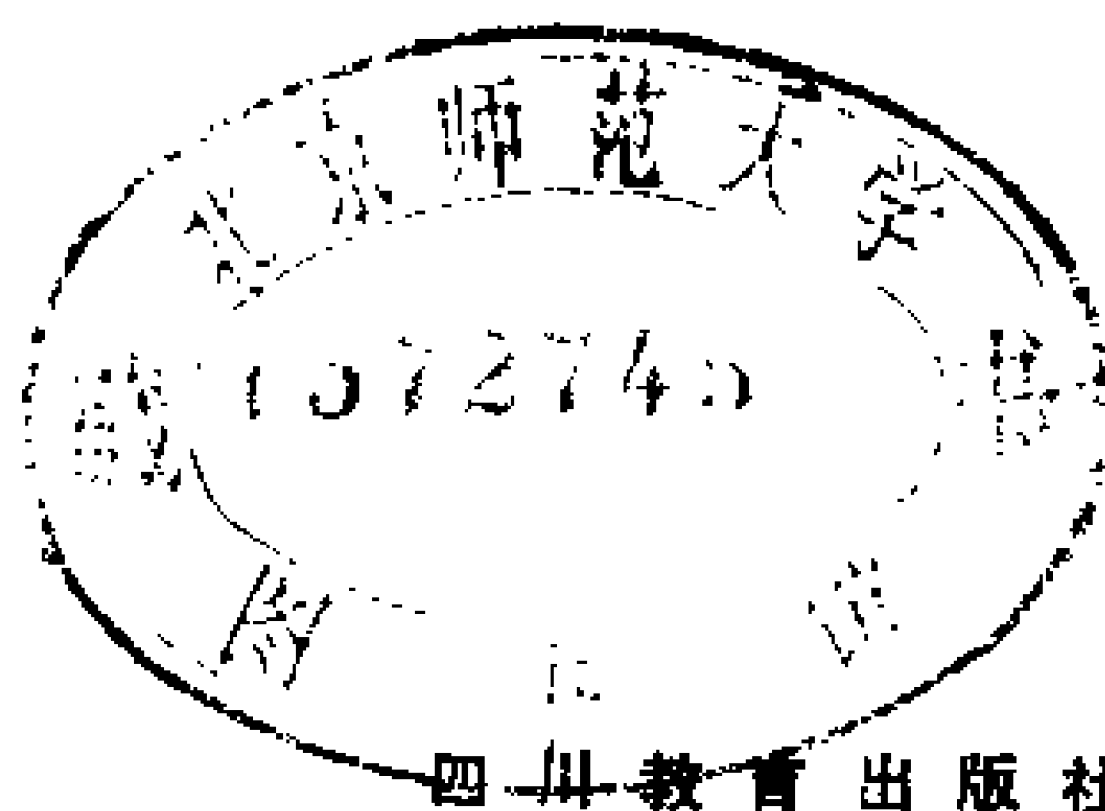
数学小品译丛

数 学 瑰 宝

第 二 辑

〔美〕R. 洪斯贝格尔 著

伍 登 祥 译



一九八八年·成都

责任编辑：韩承训

封面设计：文小牛

版面设计：顾求实

数学瑰宝 (第二辑)

数学小品译丛

四川教育出版社出版发行

(成都盐道街三号)

四川省新华书店经销

绵阳新华印刷厂印刷

开本787×960毫米1/32 印张9.375 插页2 字数156千

1990年12月第一版

1990年12月第一次印刷

印数：1—1345册

ISBN7—5408—0035—6/G·38

定价：3.12元

741178/10

作者为中译本
写的附言

获悉《多尔恰尼丛书》中我的四卷《数学瑰宝》由译者译成中文，这实在是非常意外的事情。我为本书有了中译本殊感荣幸，欣然写出下面的简短附言，作为译本的开场白（不是用来代替本书原有的序言）。

译者希望把本书介绍给中国读者，我为此感到非常荣幸，相当初等的数学中有多少动人心弦的东西，这是值得注意的事情。这个译本里也寄托着我殷切的希望：愿读者将能揭示出数学中许多可喜的新东西。

洪斯贝格尔

1983.4.18

前 言

美国数学协会的《多尔恰尼数学介绍性著作》丛书，是因机缘巧合而问世的。

纽约市立大学亨特学院多尔恰尼 (Mary P. Dolciani) 教授，本人是一位才华出众、工作热情的教师和作者，她一直在追求数学讲解工作中理想的上乘境界。

与此同时，协会已经获得本书的手稿，这是一卷短文集子，似乎并不完全适宜于收入协会现有的任何丛书，但是手稿内容引人入胜，文风清新，显然是值得出版的。

后来，水到渠成，多尔恰尼教授决定设立一笔周转资金来创办这套《数学介绍性著作》丛书，籍以实现她的目的。

本丛书的选题既要求清新的口语风格，也要求引人入胜的数学内容。预期，各卷都有丰富的习题，很多卷还附有解答。因此，这套丛书将能提供有价值的丰富材料，尤其是综述性课题的材料，我们设想，这套丛书是有数学才能的中学生可以看懂的，但水平更高的数学工作者也不能对此掉以轻

心。

美国数学协会当然乐于接受多尔恰尼教授设置这套丛书的慷慨馈赠。她既是协会出版委员会的委员，又是管理委员会的委员，为协会服务，成绩斐然。管理委员会真诚愉快地决定将这套丛书冠以她的名字，以示敬意。

美国数学协会出版委员会主席

贝肯巴赫

(Edwin F. Beckenbach)

序 言

数学里的美妙思想真是多，无论你多么艰辛多么持久地挖掘，数学中令人心花怒放宝物好象永远也掘不尽挖不完似的。不仅在高级的深奥著作中这些瑰宝才耀眼夺目，就是在那些简单的题材中也显示出鬼斧神工，匠心独运。这册书讲了好几十个初等问题，主要是从1894年到1975年的美国数学月刊里收集来的。这些问题中包含了几十条巧妙构思，其中有二十来条真是令人赏心悦目，美极了。

保尔·厄尔迪什 (Paul Erdos) 兴了这么一种说法，就是上帝手头有一本书，所有的数学定理和它们的最漂亮的证明都在里面，每当他想赞赏某个定理时，他就说“这个定理是上帝那本书里的！”这里也许可以这么说，本书是从下述观点出发写成的：人生的一切财富都是上帝赐予的，我们应当怀着感恩的心情愉快地收下这份礼物。为了上帝的光荣，为了得到上帝的赞许，我们应分享这份礼物。

具有大学一年级的数学知识就足以读懂这册书的大部分内容了。偶尔也讲到别的内容，即使这

样，所讲的东西也几乎总是初等的。这些内容由于现在的课程表安排得太满而无法插进去，不得不延迟到后期才讲。我指的就是匹克 (Pick) 定理和圆反演的基本理论。如果你没有学过这些知识也不必害怕，因为需要用到它们时，很快就可以学懂的。有关的参考内容在本书正文中要讲到。

本书所讲的大部分问题都曾在著名的数学杂志的问题栏中登载过。每个问题的开头我们都指出来源、提问人、解答人^①。在问题流传过程中这些线索逐渐模糊甚至中断了，所以在说某个问题是某个人提出的，或者说某问题是某人解答的时候，或多或少是冒了一点风险说的。写出参考来源主要是指明我碰巧见到这个问题的地方。指明下面一点对有关人士是公平的：我常常只采用了一个问题或解答的某一部分，而且一般来说我都把表述方式完全改写或大大地美化了。对很多问题的叙述方式进行修改，目的是想让它更引人注目。这不是一本出题让你做的书（尽管你先做一下题定会得到更大的乐趣），而是数学奇迹的小橱窗。不过在书末我们还是出了几十道练习题给大家做。

为了帮助读者查找某个具体问题或追溯某个感兴趣的题目，我们把全部问题归成下面三大类附于

^①在译文中略去——译者注。

书末：

(I) 代数，算术，数论，数列，概率。

(I) 组合论，组合几何（极大与极小）。

(II) 几何（极大与极小）

在参考文献中用了下列缩写符号：

AMM——美国数学月刊；

MM——数学杂志；

NMM——国家数学杂志（数学杂志的前身）。

我很感谢伊凡·尼文教授，他仔细审阅了手稿，使我能作出许多更正和改进。也感谢我的同事列罗衣·迪基，E.F. 贝肯巴赫教授，亨利·阿尔德，雷夫·波阿斯，唐纳·阿尔伯斯，G.L. 亚历山大逊，因为他们提出了许多建设性的批评。

罗斯·洪斯贝格尔

目 录

一、象棋比赛.....	(1)
二、 n 的有序分解.....	(4)
三、圆内的区域.....	(5)
四、渡船.....	(9)
五、鼓半圆.....	(11)
六、司机问题.....	(14)
七、屋角的帘子.....	(17)
八、给平面着色.....	(20)
九、一个显然的极大值.....	(22)
十、 $\cos 17x = f(\cos x)$	(24)
十一、正方形内的格点.....	(25)
十二、不透明正方形.....	(28)
十三、打叉与画圈.....	(32)
十四、直角三角形的一个惊奇性质.....	(33)
十五、 4444^{4444} 的位数.....	(36)
十六、方程 $\sigma(n) + \varphi(n) = n + d(n)$	(38)
十七、关于 k 云.....	(41)
十八、极小和.....	(43)
十九、 7^{8888} 的最后三位数.....	(46)

二十、掷骰子 (一)	(48)
二十一、穿刺立方体	(49)
二十二、二重序列	(51)
二十三、分点圆	(55)
二十四、三角形的边长	(60)
二十五、请勿使用微积分	(61)
二十六、 a^b 与 b^a	(68)
二十七、一则趣味数学题	(70)
二十八、球面上的地图	(72)
二十九、平面上的凸区域	(76)
三十、联立丢番图方程	(82)
三十一、反射切线	(83)
三十二、拆得干净利落的方格棋盘	(85)
三十三、雪球	(90)
三十四、从1到10亿	(92)
三十五、邻接非交叠单位正方形	(93)
三十六、一个丢番图方程	(101)
三十七、斐波那契数列	(104)
三十八、厄尔迪什不等式	(109)
三十九、分格点	(112)
四十、完全数	(115)
四十一、四边形的边	(118)
四十二、算术级数中的素数	(120)
四十三、关于切伐线	(123)

四十四、牛和羊·····	(127)
四十五、平方序列·····	(129)
四十六、内接十边形·····	(130)
四十七、红点与蓝点·····	(134)
四十八、遂尔法·····	(137)
四十九、关于 $\pi(n)$ ·····	(139)
五十、定长弦·····	(143)
五十一、内对角线的条数·····	(145)
五十二、掷骰子 (二) ·····	(148)
五十三、古怪的数列·····	(150)
五十四、长长的相邻自然数串·····	(155)
五十五、最小内接四边形·····	(158)
五十六、三角形数·····	(162)
五十七、关于正 n 边形·····	(171)
五十八、费马数·····	(173)
五十九、一个倒数不等式·····	(177)
六十、完全四次方·····	(178)
六十一、装方块·····	(180)
六十二、红球与绿球·····	(187)
六十三、算术级数中的复合数项·····	(189)
六十四、把等边三角形联结起来·····	(191)
六十五、测验·····	(194)
六十六、托勒密定理的一个应用·····	(196)
六十七、又一个丢番图方程·····	(201)

六十八、复数的一个不寻常的性质·····	(203)
六十九、圆链·····	(205)
七十、完全平方数末尾的重复数字·····	(209)
七十一、一条分角线·····	(211)
七十二、不等式组·····	(213)
七十三、正26边形的一个意想不到的性质··	(214)
七十四、再谈完全平方数·····	(217)
七十五、奇怪的多项式·····	(222)
七十六、形心圆·····	(224)
七十七、容易求出的余式·····	(228)
七十八、3 的一个奇特性质·····	(229)
七十九、正方形内的一个正方形·····	(230)
八十、永远是平方·····	(232)
八十一、将自然数分组·····	(234)
八十二、边长成算术级数的三角形·····	(236)
八十三、通过排列得出的分数·····	(238)
八十四、关于二项式系数·····	(239)
八十五、费马数 F_{73} ·····	(241)
八十六、圆内接四边形·····	(247)
八十七、自然数的特别三数组·····	(249)
八十八、一些素数的和·····	(250)
八十九、又一个古怪的数列·····	(253)
九十、椭圆与格子·····	(260)
九十一、阿基米德三角形·····	(269)
练 习·····	(277)

一、象棋比赛

假设纽约市的象棋大师比美国其他地方合起来的还多。计划举办一次象棋比赛，全美象棋大师都参加。经商定，举行比赛的地点应当设在使参赛的人走的路程最短的地方。纽约的棋手说，根据这条标准，棋赛地点应选在纽约市。西海岸的棋手们却争辩说，选在参加棋赛的棋手们的重心所在地或其附近更好些。问棋赛究竟该选在何处举行？

解答 纽约棋手的意见是正确的！用 N_1, N_2, \dots, N_k 表示纽约的棋手，其他棋手为 O_1, O_2, \dots, O_t 。因纽约棋手数目过半，故有 $k > t$ 。把棋手们一一配成对 $(N_1, O_1), (N_2, O_2), \dots, (N_t, O_t)$ 后，纽约大师 $N_{t+1}, N_{t+2}, \dots, N_k$ 不包含在内。

现在来考虑 (N_1, O_1) 。无论比赛在哪里举行，棋手 N_1 与 O_1 必须走的路程之和至少是“ $N_1 O_1$ ”（他们所在的两个城市间的直线距离）。于是，全体棋手走的总路程至少是

$$S = N_1 O_1 + N_2 O_2 + \dots + N_t O_t.$$

如果在纽约比赛， S 就是最短路程。如果比赛在别处举行，那么， t 对棋手至少必须走一段路程 S ，而棋手 $N_{t+1}, N_{t+2}, \dots, N_k$ 所走路程不再是零，从而增长了总路程，因此，纽约是最佳比赛地点。

J. H. 布恰 (Butchart) 与里奥·毛塞 (Leo Moser) 在《数学文稿》(Scripta Mathematica), 1952, 221—236页上写过一篇精彩的文章《请勿使用微积分》(No Calculus Please)，考虑了一个类似的问题：

在直线上依次给出了 n 个点： x_1, x_2, \dots, x_n ；试在此直线上求出一点 x ，使得它与直线上已给各点的距离之和 S 最小（图1）。



图 1

显然， x_1x 与 x_nx 之和至少必须是 x_1x_n 。现在“从外向内”将各点配成对，作成区间套 $(x_1, x_n), (x_2, x_{n-1}), \dots$ 。如果 n 是奇数，则点 $x_{(n+1)/2}$ 打单。由于各配对点距离之和在它们之间的任意一点 x 处达到最小，最内的区间中的一点 x 使各对之距离同时达到最小值，所以，当 n 为偶数时，

$$S \geq x_1x_n + x_2x_{n-1} + \dots,$$

无论 x 在最内区间中的何处，均取等号。当 n 为奇

数时，将 x 取成（属于最内的区间中的）已知点 $x_{(n+1)/2}$ 即可得到同样的最小值，此时，距离 $x - x_{(n+1)/2}$ 等于零。

二、 n 的 有序分解

数3可以用四种方法（要考虑项的次序）表成一个或几个自然数之和：

$$3, 1+2, 2+1, 1+1+1.$$

问数 n 有多少个这种表示法？

解答 考虑排成一系列的 n 个1. 用个数不超过 $n-1$ 的插子插在 n 个1之间的 $n-1$ 个空格内，这样得到的任一排列都与 n 的一个表示法相对应，反之亦然. 例如

$$1\ 1\ |\ 1\ 1\ 1\ |\ 1\ |\ 1\ 1\ 1\ \cdots 1\ 1$$

$$n=2+3+1+n-6$$

因为在 $n-1$ 个空格的每一个中，既可以插入一个插子，也可以不插，所以共有 2^{n-1} 个插入插子的方法，因而 n 就有 2^{n-1} 种表示法.

三、圆内的 区域

在圆周上取 n 个点，作弦将它们连接起来，设此圆内任何三条弦都不共点，问此圆内部可分成多少个区域？

解答 假设诸弦是一条一条地依次画进图中的，一条新弦穿过已有的各个区域便增加了割出的区域的个数（图2），新增加的区域数等于与新弦相交的各弦把新弦分成的段数，这个数比新弦上的交点数多一，于是我们轻而易举地便可以证明一个著

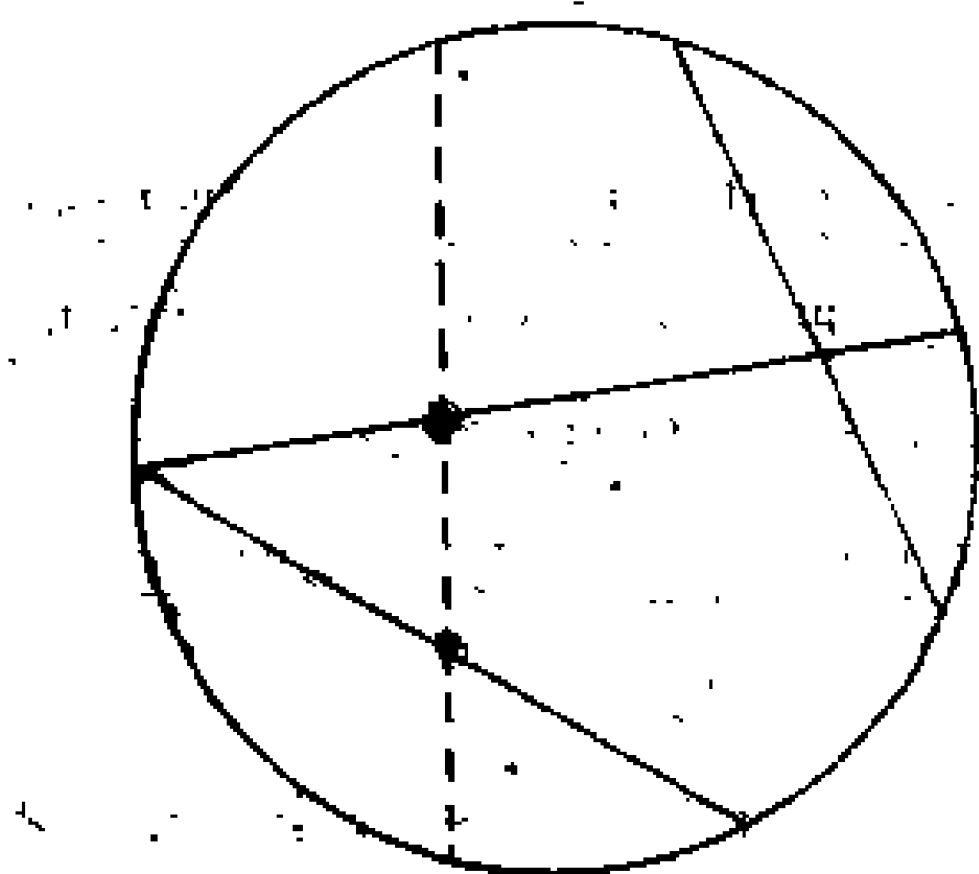


图 2

名的公式：设圆内 L 条弦中任意三条都不共点，在圆内总共有交点 P 个，则这 L 条弦把圆分成 $P+L+1$ 个区域。

$L=1$ 时， $P+L+1=0+1+1=2$ （图3）。若添加的一条弦与第一条相交，则

$$P+L+1=1+2+1=4,$$

若不与第一条相交，则

$$P+L+1=0+2+1=3.$$

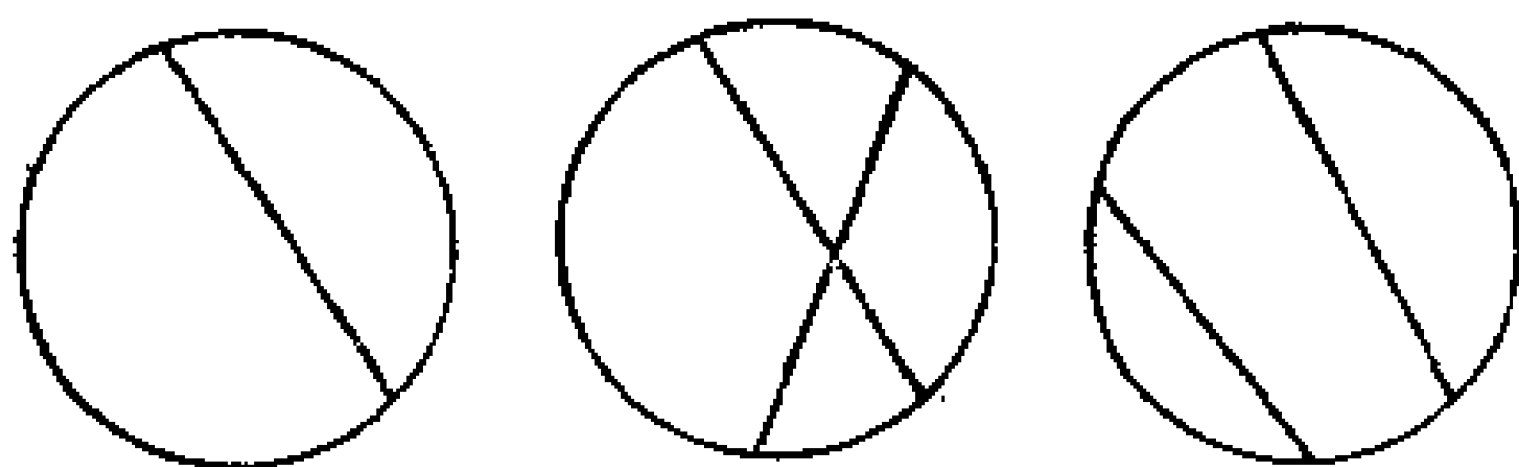


图 3

现在用归纳法证明这个公式. 设 $L \geq 2$ 时公式成立. 新添一条弦后假定增加了 k 个新交点. 此新弦与其它 k 条弦相交时必穿越 $k+1$ 个区域，于是区域总数便增加 $k+1$. 因此，在 $L+1$ 条弦与 $P+k$ 个交点的情形，区域总块数为

$$(R+L+1)+(k+1)=(P+k)+(L+1)+1,$$

这就通过归纳法确立了上述公式。

一个交点 X 与圆周上已知 n 个点中的四字组

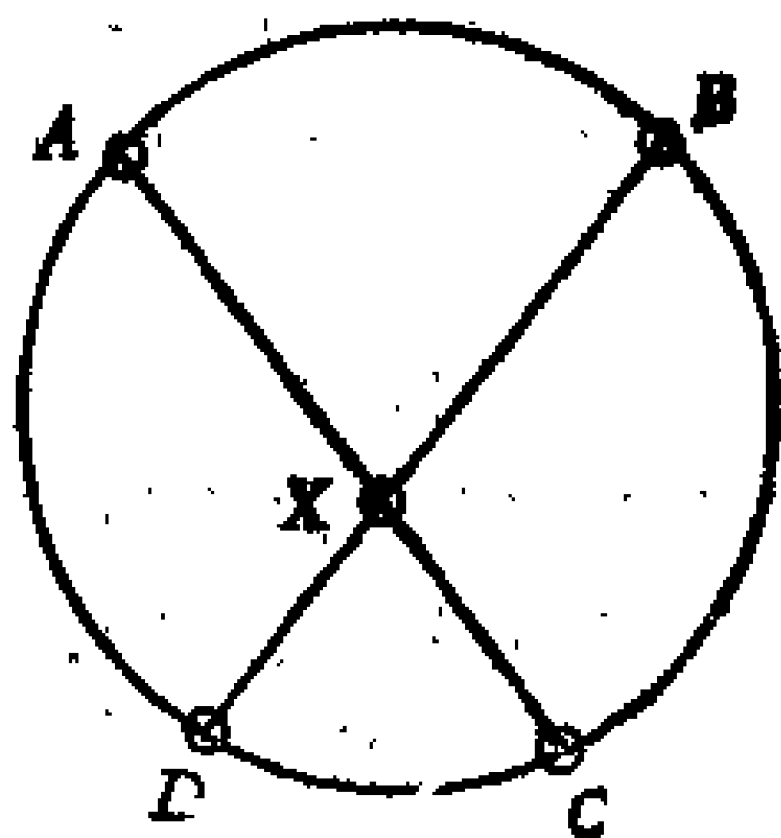


图 4

(A, B, C, D) 之间显然有一一对应关系(图4), 因此交点数目也就是四字组的组数 C_n^4 . 因为共有 C_n^2 条弦, 所以 n 个点两两相连构成的区域数是

$$P + L + 1 = C_n^4 + C_n^2 + 1.$$

(注意, 上述结果对于平面上的任何凸区域也是成立的, 这个方法可以推广到高维情况. 一个点集 S 称为凸集, 如果 S 中任意两点 A 与 B 连成的线段 AB 完全含在 S 内. 关于凸集的详细情况, 请看罗素·V·本森 (Russell V. Benson): 欧几里德几何与凸性 (Euclidean Geometry and Convexity), McGraw—Hill, 1966) .

还可以更巧妙地推算出区域数目, 方法是一条一条地抹去所有的弦, 我们来考虑每抹去一条弦, 区域数目减少的个数. 每条弦隔开两个区域, 弦一

抹掉，两个区域便合二为一了。因此减少的区域数比弦上交点数多一，但每个交点位于两条弦上，无论抹去哪一条弦，交点同时也从另一条弦上消失了，因之，在整个抹线操作中，每个交点只算一次，对每条弦来说减少的区域数就是

(弦上留下的交点数) + 1.

把全部 L 条弦抹去，我们便看出减少的区域总数包括全部交点个数 P ，再加上每条弦对应的一个，也就是说总共减少了 $P + L$ 个区域。因为全部弦抹完之后圆的内部仍旧存在，所以最初（抹之前）必有 $P + L + 1$ 个区域。

四、渡船

两条渡船以常速度在一条河上往返行驶，一靠岸便立即掉头往回开。这两条船同时抵达对岸，在离一条岸 700 英尺处首次相遇，然后继续向岸边开去，掉头后在离对岸 400 英尺处第二次相逢。试问答河的宽度是多少英尺。

解答 两只船第一次相遇时所走路程之和恰好是河的宽度（图5）。大家可能会觉得奇怪，两船第

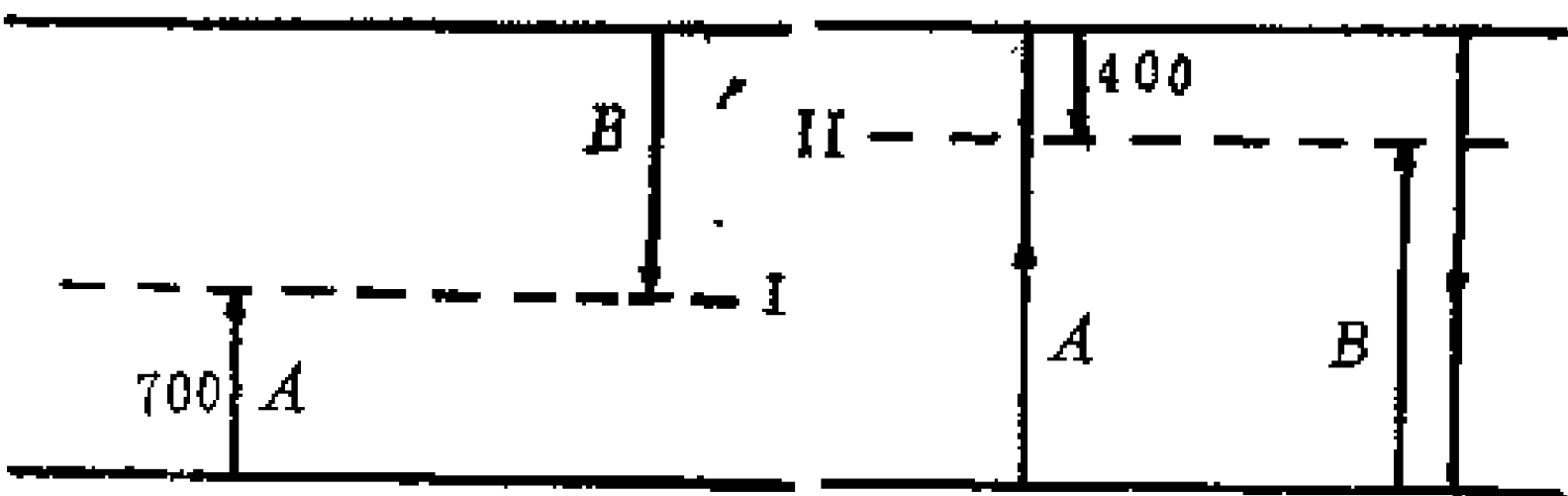


图 5

二次相遇时，它们走过的总路程竟是河宽的三倍。由于航速是常数，再次相会的时间是首次相会时间的三倍。首次相会时，渡船 A 已走了 700 英尺，三倍长时间之后它就走了 2100 英尺。但再次相会时 A

已走过一趟不往回走的 400 英尺，因此河宽就该是 $2100 - 400 = 1700$ 英尺。

五、鼓半圆

在以 O 为圆心, 1为半径的圆的弦 AB 上向外面画一个半圆. 显然, 半圆周上鼓出得最远的点 C 在垂直于 AB 的半径延长线 ODC 上(图6). (对于半圆周上的另外的 C' 来说, 我们有 $OC' < OD + DC' = OD + DC = OC$). 当然 OC 的长度随着弦 AB 的不同选取而变化. 试确定 AB , 使得 OC 最长.

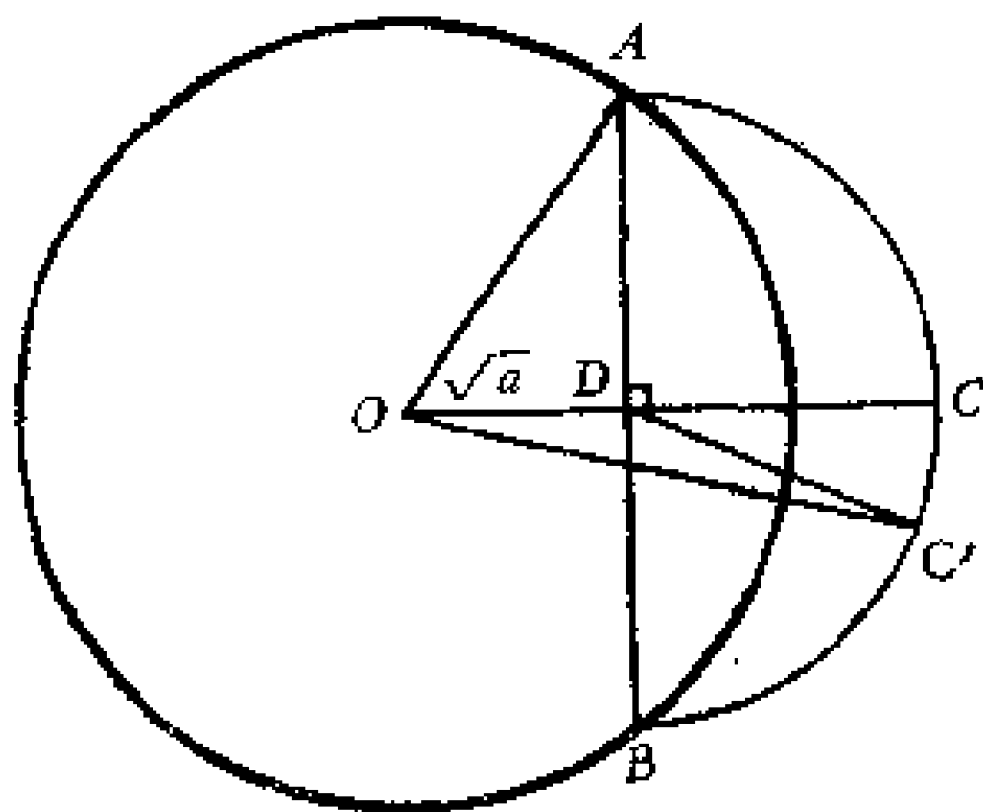


图 6

解答 令 $OD = \sqrt{a}$, 则半圆的半径为

$$AD = \sqrt{1-a} = DC,$$

$$\text{故 } OC^2 = (OD + DC)^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{1-a})^2 = a +$$

$2\sqrt{a(1-a)} + 1 - a$, 即 $OC^2 = 1 + 2\sqrt{a(1-a)}$. 要求 OC 极大, 必须 $a(1-a)$ 为极大. 由于

$$a(1-a) = a - a^2 = \frac{1}{4} - \left(a - \frac{1}{2}\right)^2$$

在 $a = \frac{1}{2}$ 时有极大值, 故 $OD = \sqrt{a} = \sqrt{2}/2$.

请注意, OC 为极大时,

$$AD = \sqrt{1 - OD^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{2}/2,$$

故得 $AB = 2AD = \sqrt{2}$. 于是 $\triangle AOB$ 的三边各为 1, 1, $\sqrt{2}$, 这表明弦 AB 所对的圆心角为直角.

下面再介绍一个很巧妙的解法. $\triangle ADC$ 是等腰直角三角形, $\angle DCA = 45^\circ$ (图7). 如果 CA 不与已知圆相切, 就会有一条弦使得 C 点在 OD 延线的更远

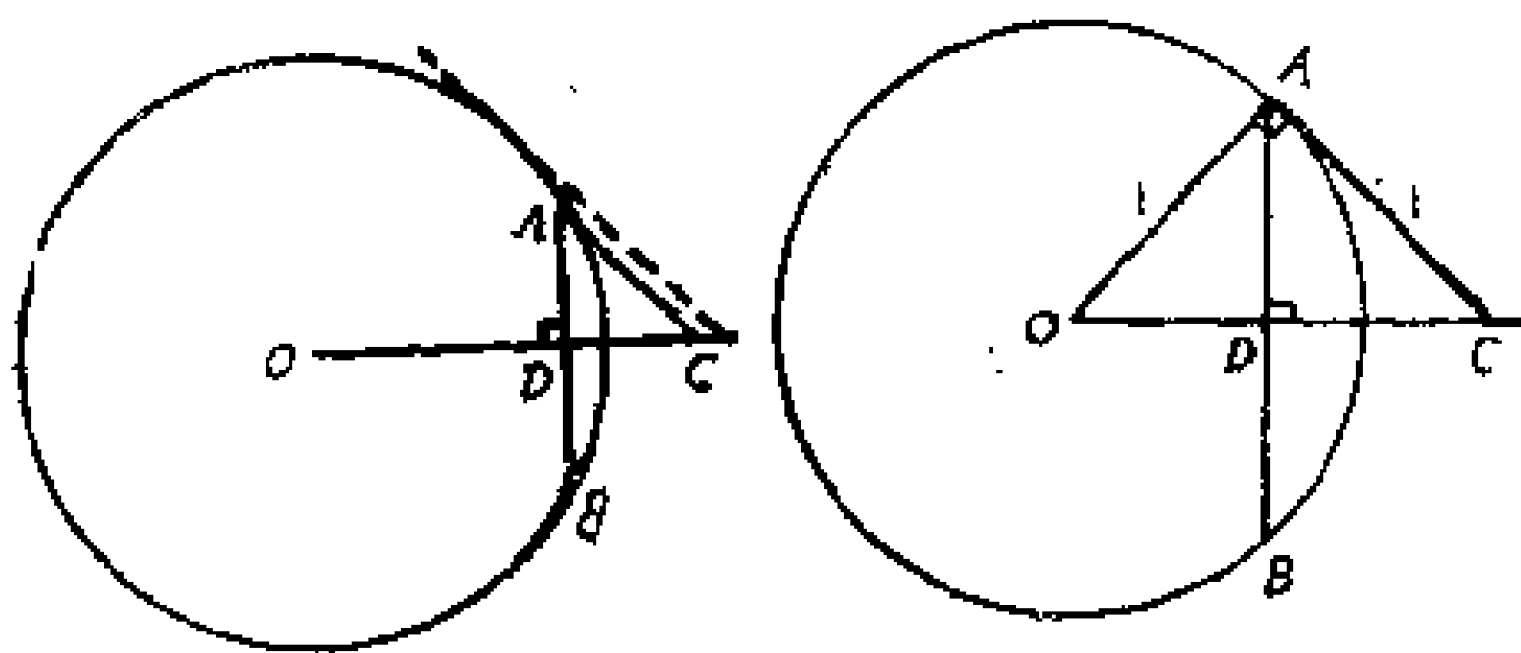


图 7

端. 因此使 OC 为极大的弦必定使 CA 成为切线, 这样 CA 也就是等腰直角三角形 OAC 的直角边. 因而 $CA = OA = 1$, 于是因 $\triangle DAC$ 为等腰直角三角形, 我

们便得到

$$AD = \sqrt{2}/2, \quad AB = \sqrt{2}.$$

六、司机问题

司密斯先生持有火车月票，每天五点正有司机在火车站接他回家，有一天他没有打招呼就乘四点的火车到了，只得步行回家，走了一阵便碰上驱车前往火车站接他的司机，于是坐上车，比平时早20分钟到了家。

另外一天，司密斯先生又没打招呼就坐四点半的火车到了，步行回家，在途中碰上司机，剩下的一段路又由司机载他，问这一次他们比平时提前多少时间到家？（假定步行与汽车的速度都固定不变，并且汽车掉头与搭司密斯先生上车都不消耗时间。）

解法一 这个问题通常都是这样解决的：第一次司机省了20分钟的开车时间，因此肯定是在离火车站10分钟（单程）路程的地方接到司密斯先生的，要是象平时一样，司机会在五点正到达车站，省了10分钟就意味着他一定是在4:50分接到司密斯的，因此司密斯先生用50分钟步行的路程，开车用10分钟便走完了，由此可知，司机的速度比司密斯先生

快五倍。

现在假设第二次司密斯步行了 $5t$ 分钟，那么，他所走的路程司机只用 t 分钟便走完了，因此，这一次是在五点前 t 分钟，即四点后 $60-t$ 分钟接到司密斯的，然而司密斯是4:30分开步走的，共走了 $5t$ 分钟，所以是在四点后 $30+5t$ 分钟被接到的，于是 $30+5t=60-t$ ，即 $t=5$ 。这样，司机(按单程算)少走了五分钟，因此这次提前十分钟到家。

上述解法是很巧妙的，然而在我们举行的新生竞赛中，有一个叫理查德·卡麦隆的学生（安大略省彼得伯勒）即席提出了下面的解法。

解法二 假定以“离车站的距离”与“时间”为纵、横坐标作图，便容易看出司密斯与司机的走动情况。比如在正常情形，每天的走动情况如下：从四点开始算（图8）（这是所谓的“世界线图”

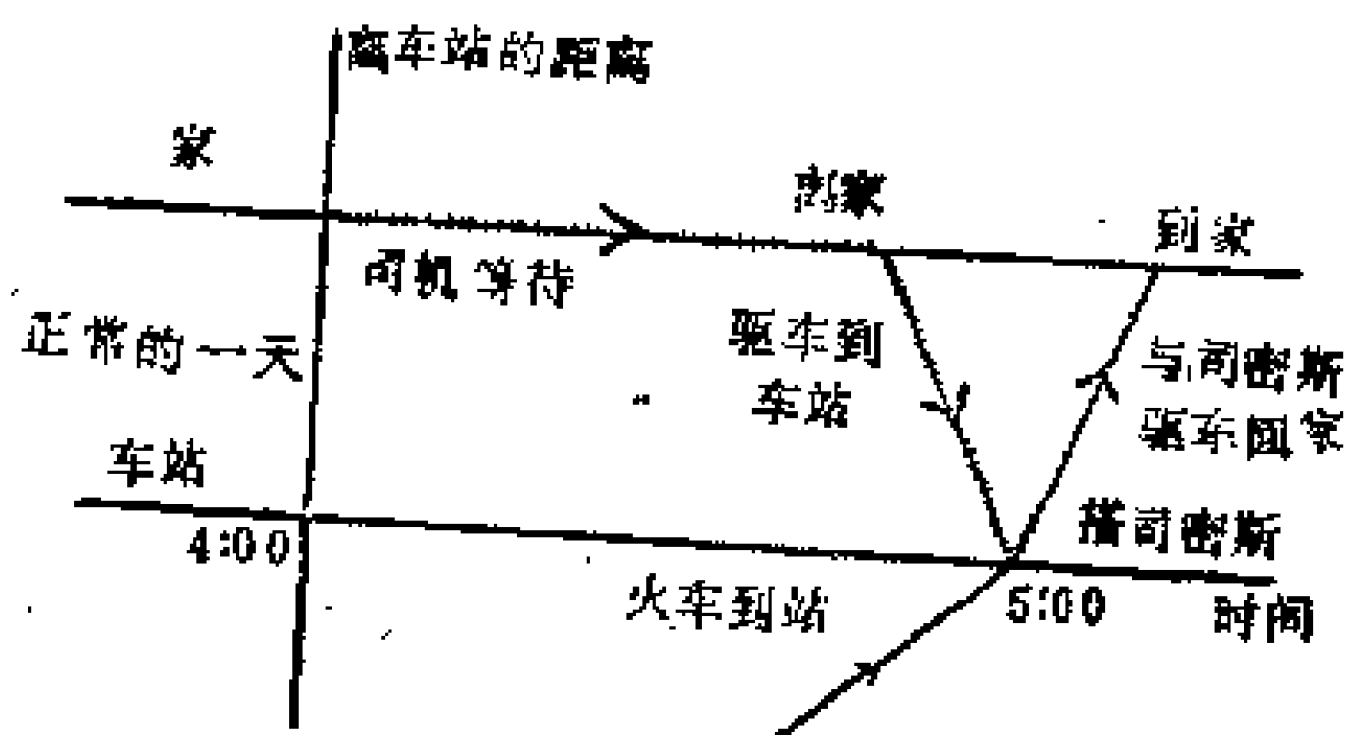


图 8

”，不过卡麦隆从未听说过这个名称）。

包括平常走法在内的三种走法都图解在图9中。因为步行与乘汽车都是常速度，所以三条世界线都分段平行，又因为4:30平分四点与五点之间的时间，所以按比例1:1分成两部分被平行线传递下去，得出第二次节省的时间为 $\frac{1}{2} \times 20 = 10$ 分钟。

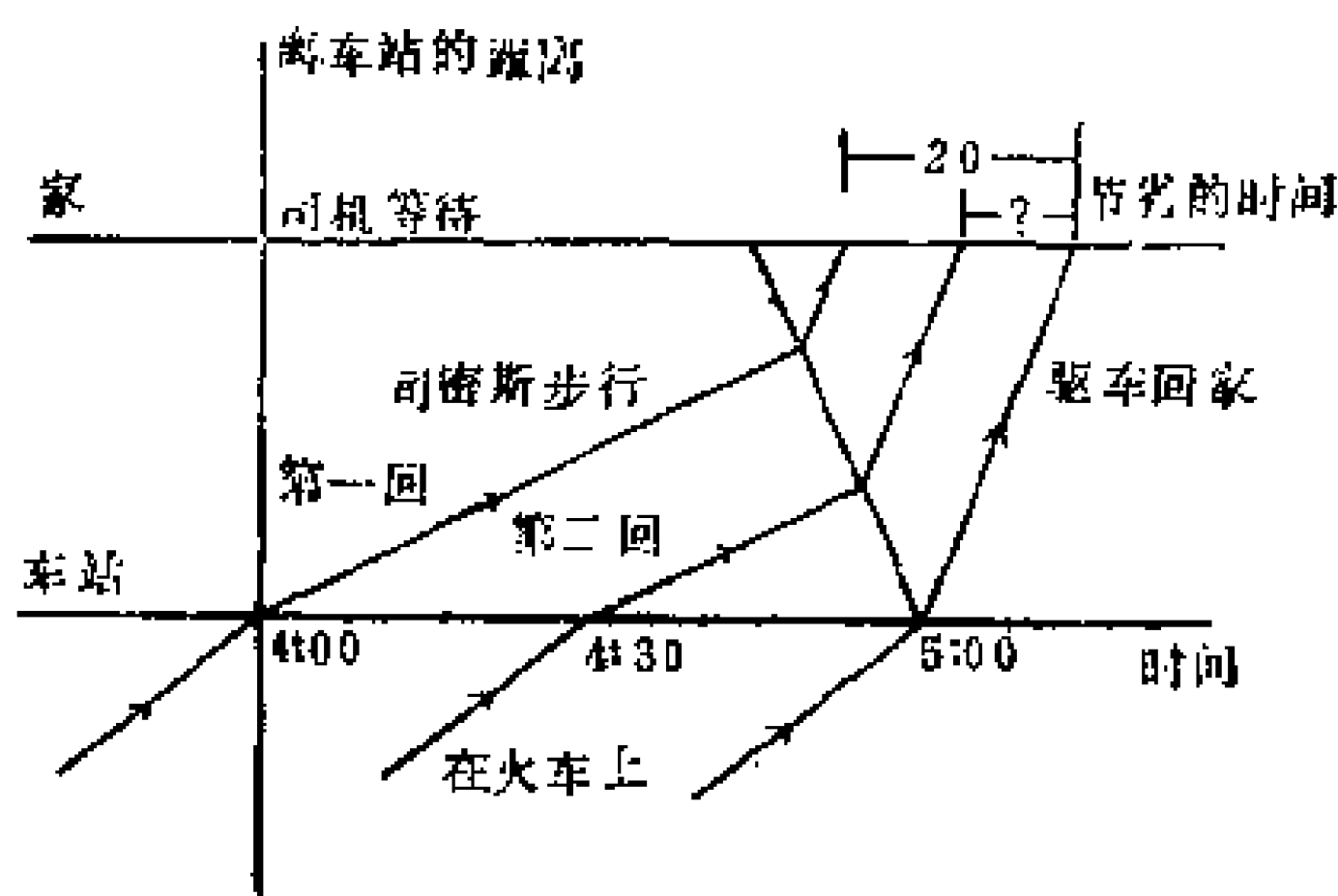


图 9

七、屋角 的帘子

在一间矩形房间的一角挂两幅 4 英尺长的帘子，使其所围的地面最大，试确定帘子的悬挂位置。

解答 解决这个问题要反复应用下面的有名引理。

引理 底边相等、底边所对顶角相等的三角形中面积最大的三角形是等腰三角形〔显然，所有这些三角形都可以安放在圆的弓形中，这些具有公共底边的三角形中只有等腰三角形的高最长（图10）。〕

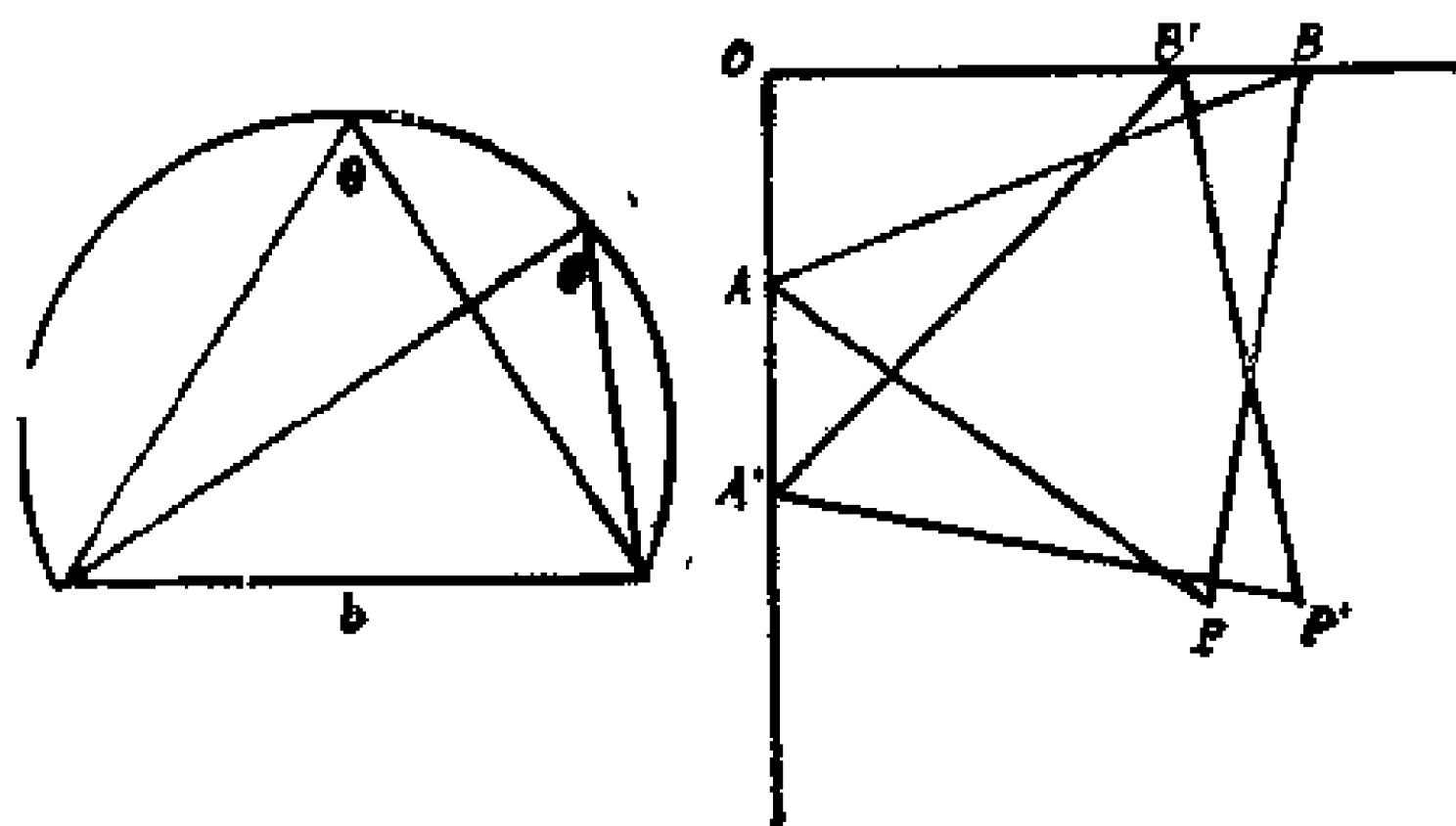


图 10

令 O 表示房间的屋角，并设 A 、 B 是帘子与墙接触处，于是所围成的地面面积为 $\triangle AOB + \triangle ABP$ ，这里 P 是两幅帘子的接头处（显然帘子要在端部接头才能保证围出最大区域，因此 P 就是公共端点）。

假设 $\triangle OAB$ 不是 $OA=OB$ 的等腰三角形，就可以将帘子移到位置 $A'P'$ 与 $B'P'$ ，使得 $OA'=OB'$ ，而 $A'B'$ 仍然等于 AB 。于是 $\triangle A'B'P'$ 与 $\triangle ABP$ 就相等（事实上全等），而且根据引理， $\triangle OA'B'$ 大于 $\triangle OAB$ ，即新位置上面积大些。因此，确保包围面积最大的挂法必须是让 $OA=OB$ 。

帘子长度相等，故点 P 永远在 AB 的中垂线上。 $OA=OB$ 时， AB 的中垂线就要平分屋角 O 处的直角，因此要得最大面积， OP 必须平分 $\angle O$ （图11），

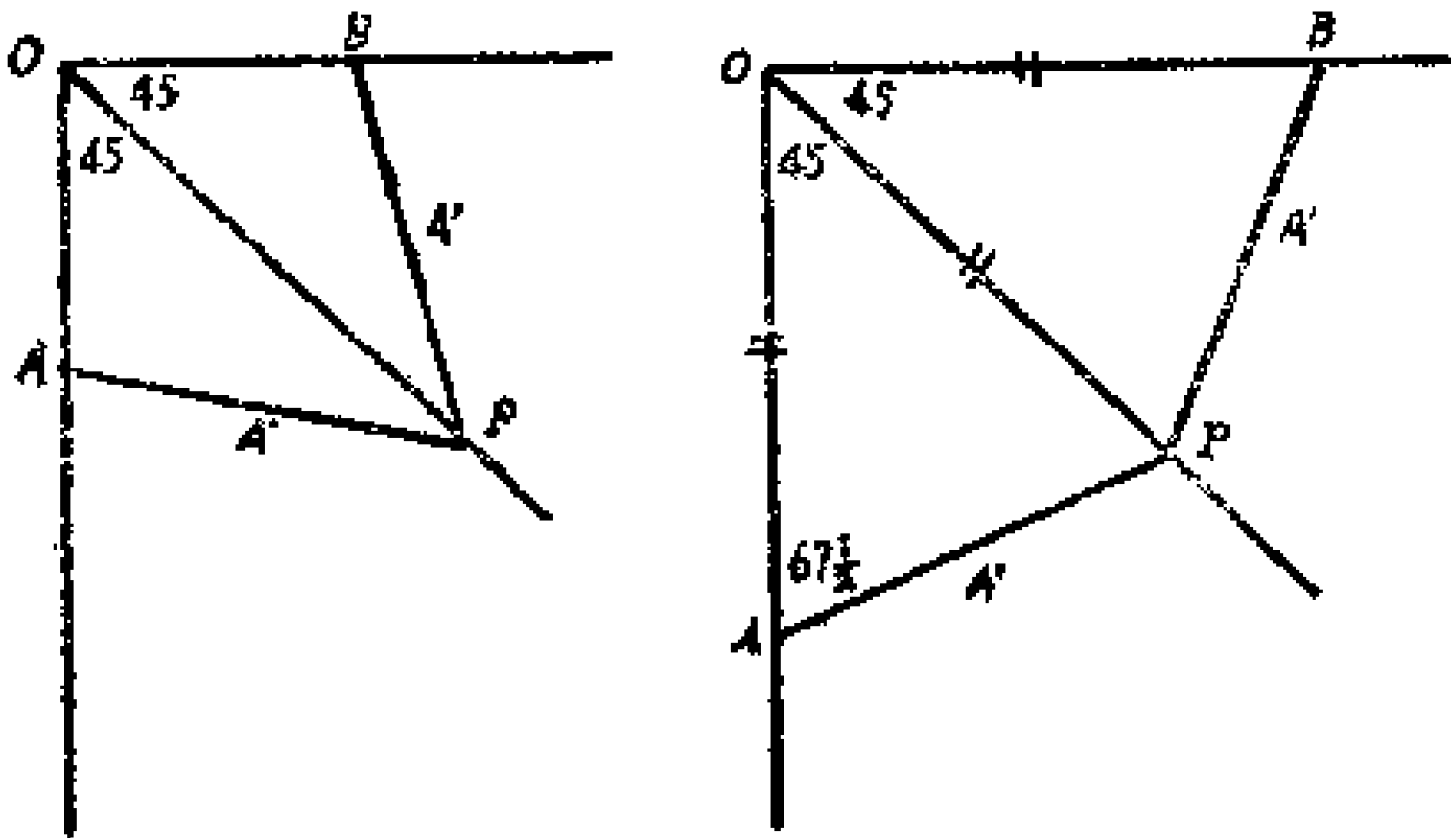


图 11

从而每幅帘子在 O 处要对一个 45° 角，并围成一个面积最大的三角形（否则必有更好的围法）。因为

AP 是常数，故由引理知，当 OAP 为等腰三角形且 $OA=OP$ 时 $\triangle OAP$ 最大.这时， $\angle OAP=67\frac{1}{2}$ ，问题就解答的很明白了，至于用直尺、圆规画出 AP 的事，留作练习好了.

在后面的问题（二十五，请勿使用微积分）中有这个问题的一个很巧妙的解法.

八、给平面着色

假设平面上的每个点都涂成红色或蓝色. 试证明有一个矩形的全部顶点颜色相同.

解答 任意七个点的集合必定至少包含四个颜色相同的点, 于是在一条直线上的七个点中一定有四个共线的点 P_1, P_2, P_3, P_4 颜色一样, 比如都是红色. 如果将这四点投影到与第一条线平行的另外两条线上, 就得到两个共线的四点组 (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) 与 (R_1, R_2, R_3, R_4) , 它们在自己之间确定出几个矩形, 并与 P_i 确定出另外几个矩形. 要是任意两个 Q 都是红色, 就可以得到一个 (顶点) 全红的矩形 $P_1 P_3 Q_1 Q_3$, 对任意两个 R 都是红色的情形类似. 如果上述两种情形一个也不发生, 那么, 某三个 (或更多的) Q 、

$$\begin{array}{lll} P_1 . & Q_1 . & R_1 . \\ P_2 . & Q_2 . & R_2 . \\ P_3 . & Q_3 . & R_3 . \\ P_4 . & Q_4 . & R_4 . \end{array}$$

某三个 (或更多的) R 必是蓝色, 但是这些蓝色的

三点组不可避免地会排列成每个三点组有一对点与另一组的一对点相对，从而形成一个（顶点）全蓝的矩形。于是得出要求的结论。

注意，这个结果对于平面上任何一个包含（无论多么小的）某个圆内全部点的区域都对。一个实质上与这个问题相同的题目曾出现在1976年春季第五届美国数学奥林匹克竞赛中。

九、一个显然的 极大值

设 P 是弦 AB 割出的圆弧 AB 上的一个动点. 当 P 在弧 AB 的中点时, 弦 AP 与 PB 之和为最大, 这条性质在直观上是显然的, 试证之.

解答 以 AB 弧的中点 O 为圆心 过 A 与 B 作第二条弧. 设 AP 、 AO 与新作的弧分别交于 Q 点与 C 点 (图12) .

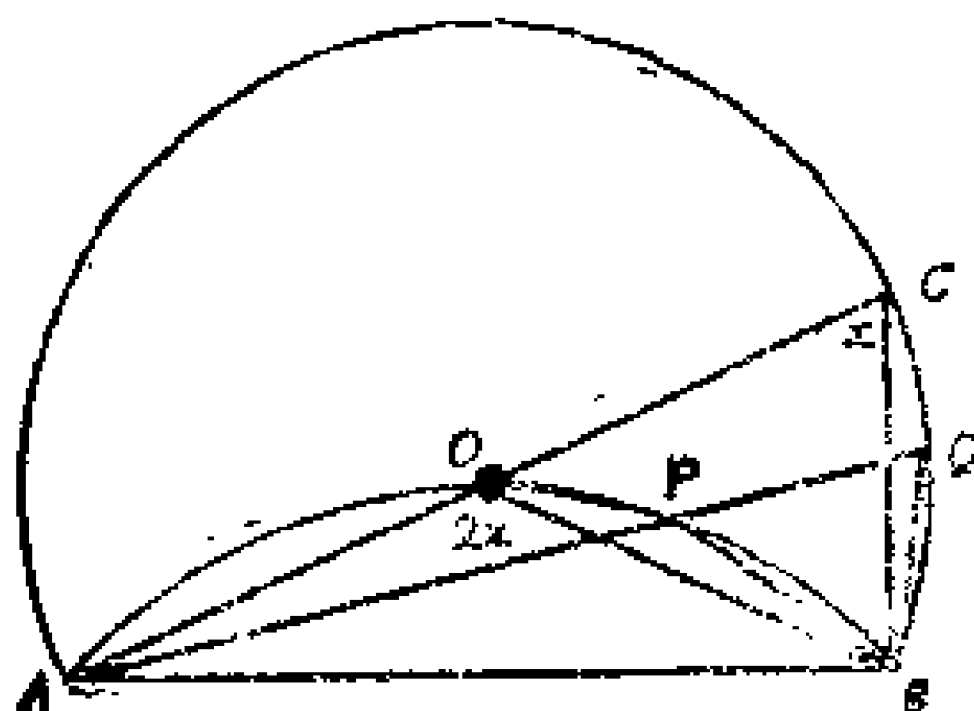


图 12

弦 AB 在圆心 O 处所对的角是它在圆周上 C 点处所对角的二倍, 但弦 AB 在 P 处所对的角与在 O 处所对的角相等, 在 Q 处与在 C 处所对的角相等. 于是

$$\angle APB = 2\angle Q.$$

但从 $\triangle PQB$ 来看,外角 APB 是 Q 与 B 两处内角之和,因此

$$2\angle Q = \angle Q + \angle QBP,$$

$$\angle Q = \angle QBP.$$

于是, $\triangle PQB$ 是等腰三角形, $AP + PB = AP + PQ = AQ$ (外圆弧上的一条弦). 很明显, 当这条弦是直径时, 即 P 在 O 处时, 它就最长.

注意, 对于以 A 、 B 为焦点的一族不断扩展的椭圆作动态考察也可以得到本题的结果. 由于对称的缘故, 椭圆与圆弧的最后一个切点是在圆弧的中点. 作最后接触的椭圆是与圆弧相接触的最大一个椭圆, 因之焦半径之和也最大, 这便是所求的结论.

$$十、\cos 17x = f(\cos x)$$

若 f 是用 $\cos x$ 来表示 $\cos 17x$ 的函数, 即

$$\cos 17x = f(\cos x),$$

试证明用 $\sin x$ 表示 $\sin 17x$ 的也是这同一个函数,
即

$$\sin 17x = f(\sin x).$$

解答 令 $x = \frac{\pi}{2} - y$, 则 $\sin x = \cos y$,

$$\begin{aligned}\sin 17x &= \sin\left[17\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\right] \\ &= \sin\left(8\pi + \frac{\pi}{2} - 17y\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - 17y\right) = \cos 17y \\ &= f(\cos y) = f(\sin x).\end{aligned}$$

请注意, 题中的17可以换成形如 $4k+1$ 的任何
整数。

十一、正方形内的格点

在坐标平面上 $n \times n$ 的正方形 S 包含 $(n+1)^2$ 个格点（坐标 x, y 均为整数的点 (x, y) ），如果 S 的顶点都是格点，且各边都平行于格子线（轴），试证明一个非常直观的结论：无论把 S 怎样摆在平面上，它含有的格点绝不可能多于 $(n+1)^2$ 个。

解答 现在考虑 S 处在平面中的任意位置。假设 S 的边界是橡皮带，平面上每个格点都钉了一颗钉子。只要橡皮带可以收缩就让它收缩，使得它围在 S 所覆盖的格点处的钉子外边。橡皮带所围成的多边形 H 叫 S 的格点的“凸包”，凸包是几何学许多研究中极其重要的一个概念（图13），如果 S 的每个顶点都正好落在一个格点上，那么 H 就是 S 自身。（关于凸包定义的更多评述，请看后面的注记。）

因为 H 含于 S 内，其面积不会超过 S 的面积：

$$H \text{ 的面积} \leq n^2.$$

1899年，乔治·匹克（George Pick）发现了一个十分重要的公式，可以计算顶点是格点，且自身不交叉的多边形 V 的面积：

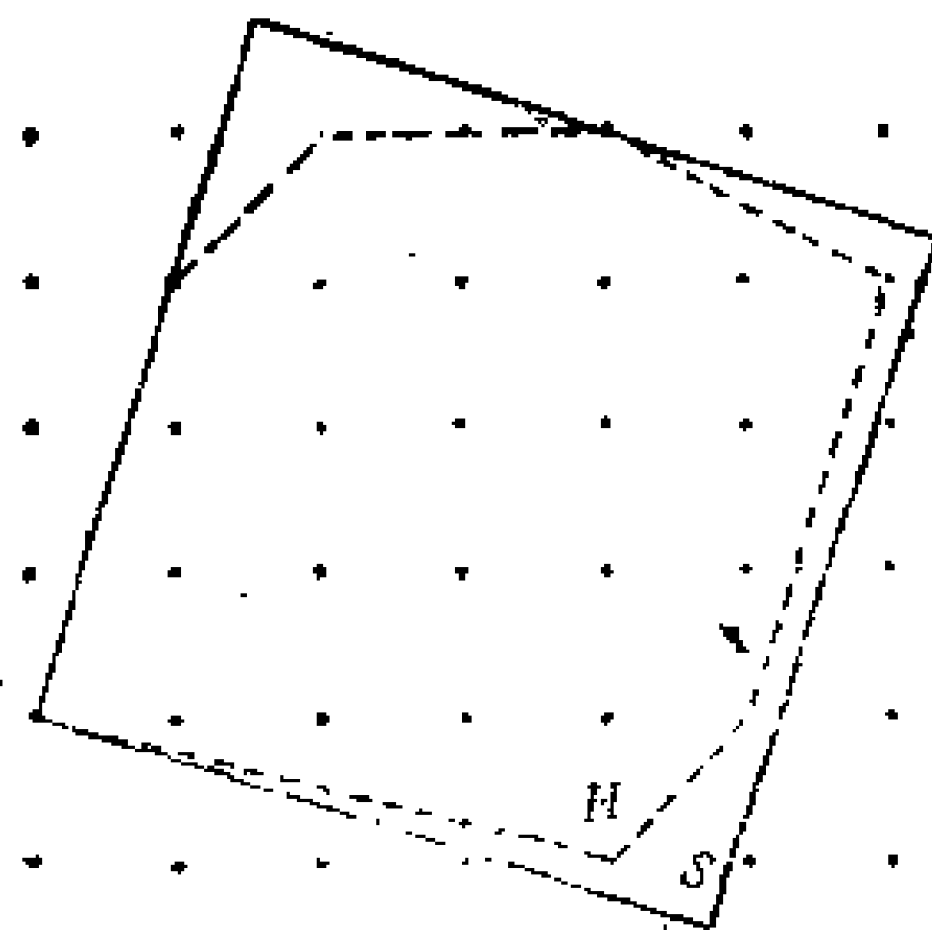


图 13

$$Y \text{ 的面积} = q + \frac{p}{2} - 1,$$

式中 q 为 Y 内格点数, p 为 Y 的边界上的格点数. (这包括顶点与边上的其他任何格点. 关于这个定理的证明, 请看后面的参考文献.) 根据匹克定理便有

$$H \text{ 的面积} = q + \frac{p}{2} - 1 \leq n^2,$$

因而

$$q + \frac{p}{2} \leq n^2 + 1.$$

因为 S 的弹性边界收缩成 H (如果说它真的会收缩的话!) 所以 H 的周长不会超过 S 的周长:

$$H \text{ 的周长} \leq 4n.$$

显然, 任何两个格点间的距离都不可能小于 1, 因

此沿着 H 的边界根本没有容纳多于 $4n$ 个格点的任何余地，即

$$p \leq 4n, \quad \frac{p}{2} \leq 2n.$$

加上前面的结果 $q + \frac{p}{2} \leq n^2 + 1$ ，便得

$$\begin{aligned} S \text{ 覆盖的格点数目} &= q + p \leq n^2 + 1 + 2n \\ &= (n+1)^2. \end{aligned}$$

注：平面点集 S 的凸包 H 是包含 S 的全部平面凸集的交集。如果一个凸集包含 S ，则也包含 H ，在这个意义上讲 H 是最小的。 H 一个多余的点也没有——它只能大到刚好包含 S 面又是凸的。如果 S 自身就是个凸集， H 和 S 当然也就完全相同了。

参考文献

罗斯·洪斯贝格尔 (Ross Honsberger), 数学技巧 (Ingenuity in Mathematics), vol. 23, New Mathematical Library, Math. Assoc. of America, 27—31.

十二、不透明正方形

边长为1的正方形内部或边界上的线段的集合叫做“不透明”的，如果每一条与正方形相交的直线至少与一条线段相接触。例如，图14(a)的两条对角线就构成一个不透明集合。图(b)是另一个不透明集合。对角线的总长为 $2\sqrt{2} \approx 2.82$ 左右，初等微积分里有一则很有意思的练习是：证明图14(b)所示

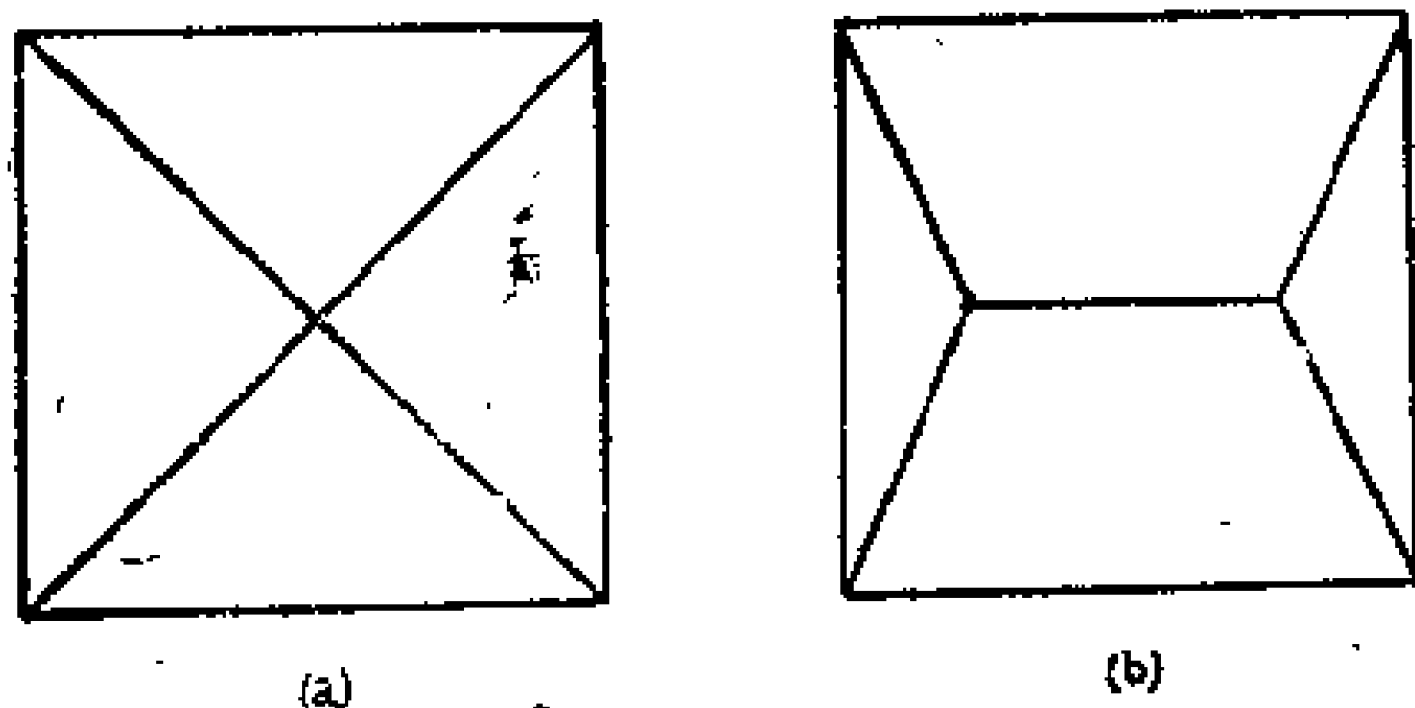


图 14

对称图形的总长为最小的不透明集合，其总长约为 $1+\sqrt{3} \approx 2.73$ 。试求一个长度比 $1+\sqrt{3}$ 还小的不透明集合。

解答 正方形的相邻两边加上它们所夹对角线的远端那一半构成一个不透明集合（图15）其长度

为

$$2 + \sqrt{\frac{2}{2}} < 2 + \frac{1.42}{2} = 2.71 < 1 + \sqrt{3}.$$

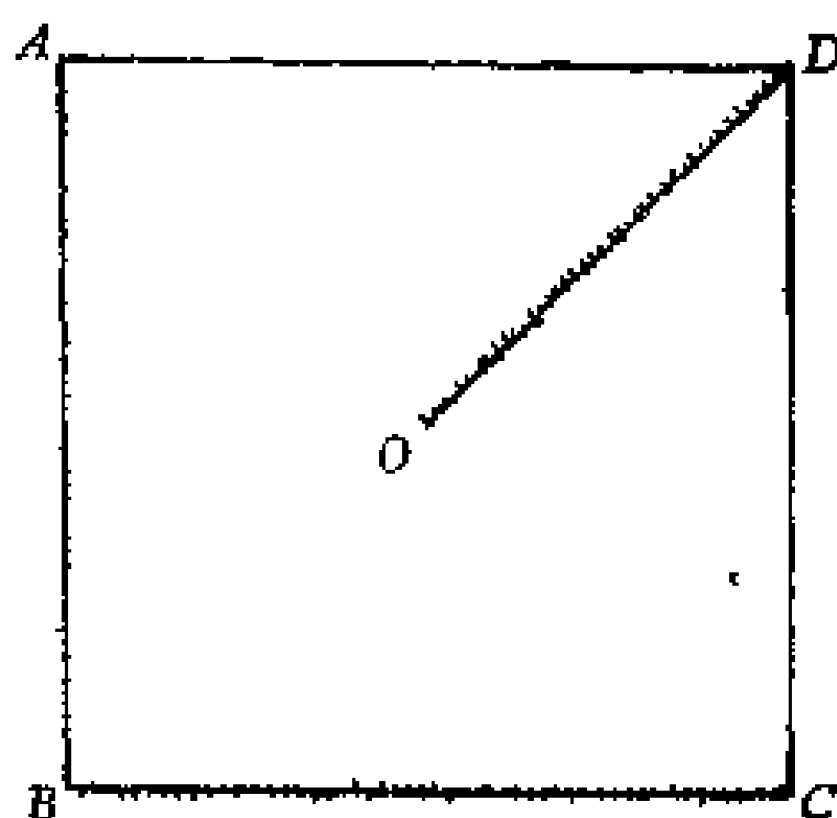


图 15

两条边 AB 和 BC 与接触 $\triangle ABC$ 的任何直线都要接触， $\triangle ABC$ 就完全不必考虑了，单是半对角线 OD 就足以使正方形的另一半成为不透明的。

事实上还有更有效的办法来考察 $\triangle ABC$ 。

$\triangle ABC$ 中一点 P ，如果使得每边在此点都对着一个 120° 角，就叫做三角形的费马点，从这点至三角形三顶点距离之和为最小（图16）：

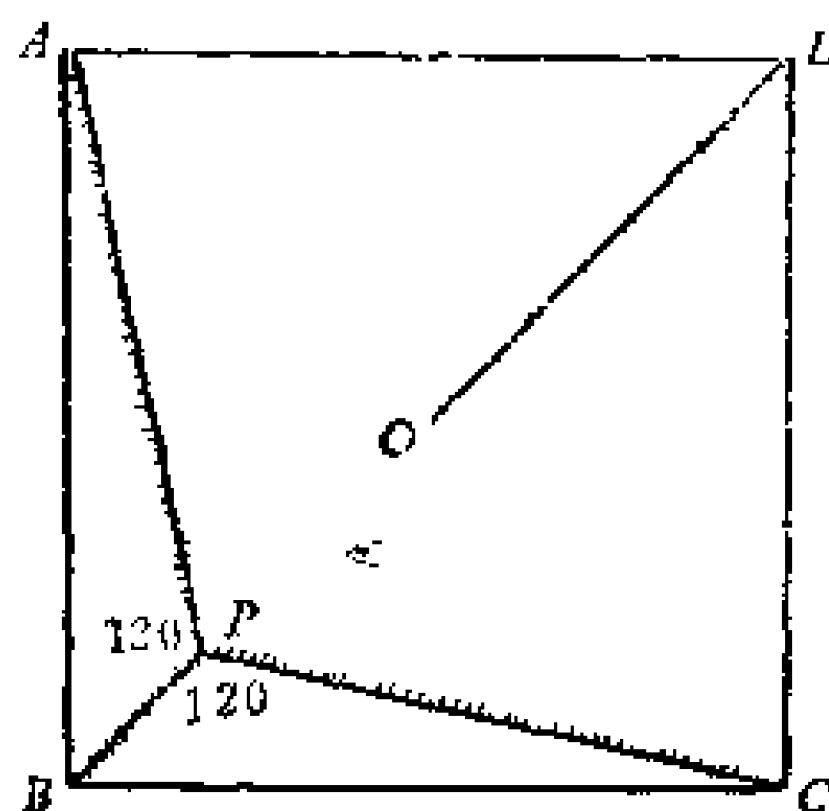


图 16

$XA + XB + XC$ 在 $X = P$ 时有极小值。

关于这个结果的详尽论述请参考我的著作《Mathematical Gems》vol. 1, 24—34（有中译本，江嘉禾译，四川教育出版社出版，《数学瑰宝》第一辑，27—42页——译者）。在那里证明了，和数 $PA + PB + PC$ 的极小值由线段 BB' 给出， B' 是从 AC 边向外侧作出的等边三角形的顶点（图17）。

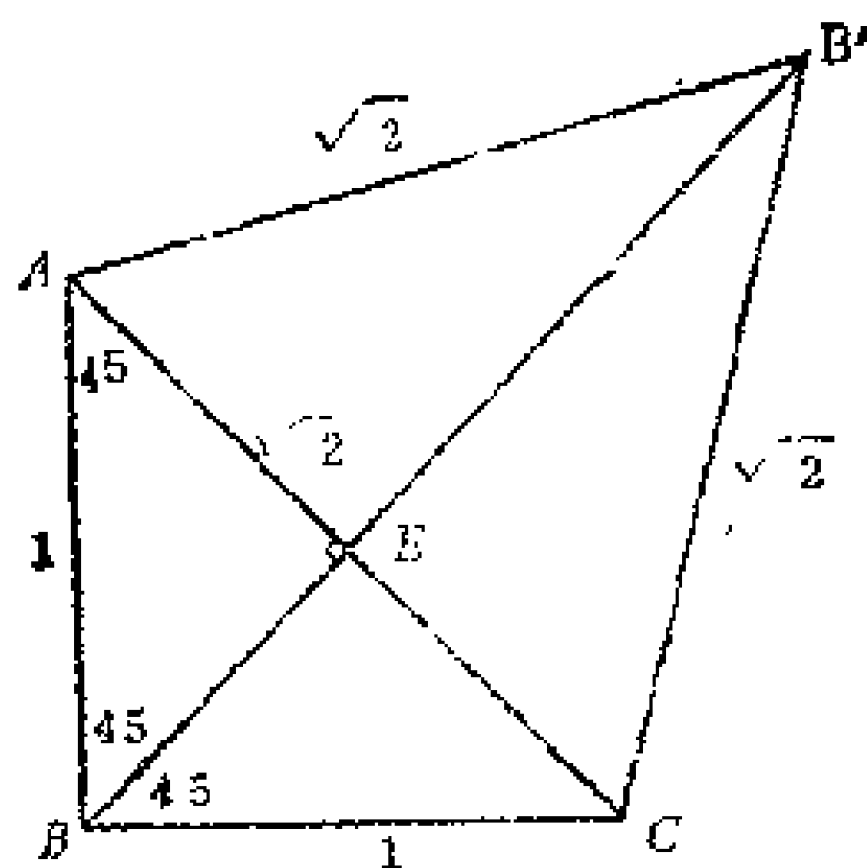


图 17

显然，此时 BB' 是 AC 的中垂线， $\triangle ABE$ 是等腰的，于是有

$$BE = AE = \frac{1}{2} AC = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$BB' = BE + EB' = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \sqrt{3}).$$

加上半对角线 $OD = \sqrt{2}/2$, 便得到一个不透明集合, 其总长约为

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (2 + \sqrt{3}) = 2.64.$$

上述精彩的解答是安大略省奥尔良市的一位中学教师莫里斯·布哇列 (Maurice Poirier) 给出的。

十三、打叉 与画圈

假定在三维空间中的 $8 \times 8 \times 8$ 立方体上来玩打叉叉画圈圈的游戏。先得到一排8字就算赢了，试问有多少条8字排贯穿立方体。

解答 这个问题并不难，直接数一下就可以解决。不过，有一个很妙的解决〔里奥·毛塞的许多解法中的一个〕是先考虑一个 $10 \times 10 \times 10$ 的立方体，它把给定的 $8 \times 8 \times 8$ 立方体包在内部，这样就有一层厚度为1的壳，内部的 $8 \times 8 \times 8$ 立方体中的赢家的8字排向两端延伸，就会刺穿外壳的两个单位立方体。但是壳中每个单位立方体只被一条8字排贯通，因此赢家的每排8字唯一地对应着外壳中的一对单位立方体，赢家的8字排的条数只不过是外壳中单位立方体的个数之半而已，即

$$\frac{10^3 - 8^3}{2} = \frac{1000 - 512}{2} = 244.$$

这个解法具有普遍意义，对于 n 维空间中棱长为 k 的立方体，赢家的直排的条数为

$$\frac{(k+2)^n - k^n}{2}.$$

十四、 直角三角形的

一个惊奇性质

试证明：如果把直角三角形的两条直角边分别绕自己的顶点旋转到斜边上去，那么它们在斜边上相重叠的线段长是三角形内切圆的直径长（图18）。

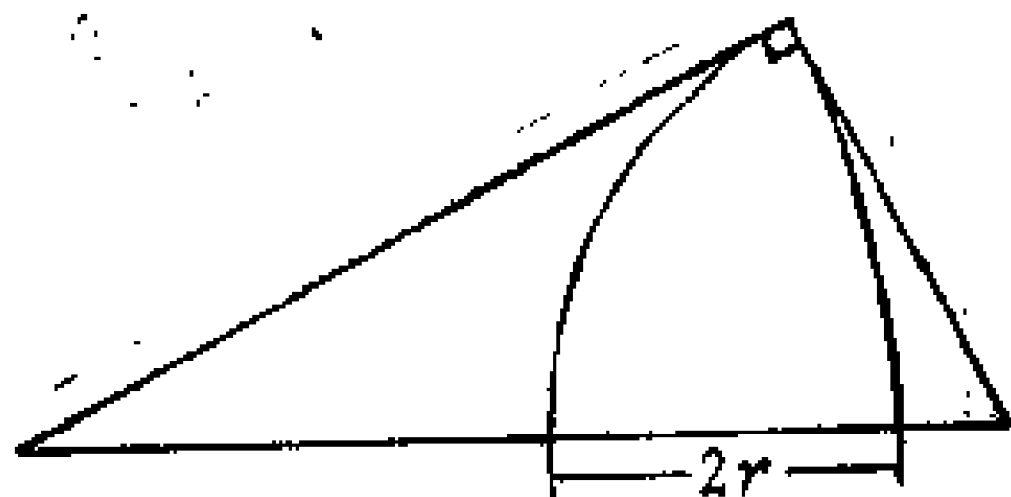


图 18

解答 一般说来，三角形的内切圆的大小不是边长的简单函数，但对直角三角形却有下面明显的关系：

$$\text{直径} = (\text{直角边的和}) - (\text{斜边}) .$$

这只要作下面的解释就明白，过直角边切点的两条半径在直角边的投影不变（图19），因为从一点到圆的两条切线等长，所以看图便知

$$(\text{直角边的和}) - (\text{斜边}) = [(x+r) +$$

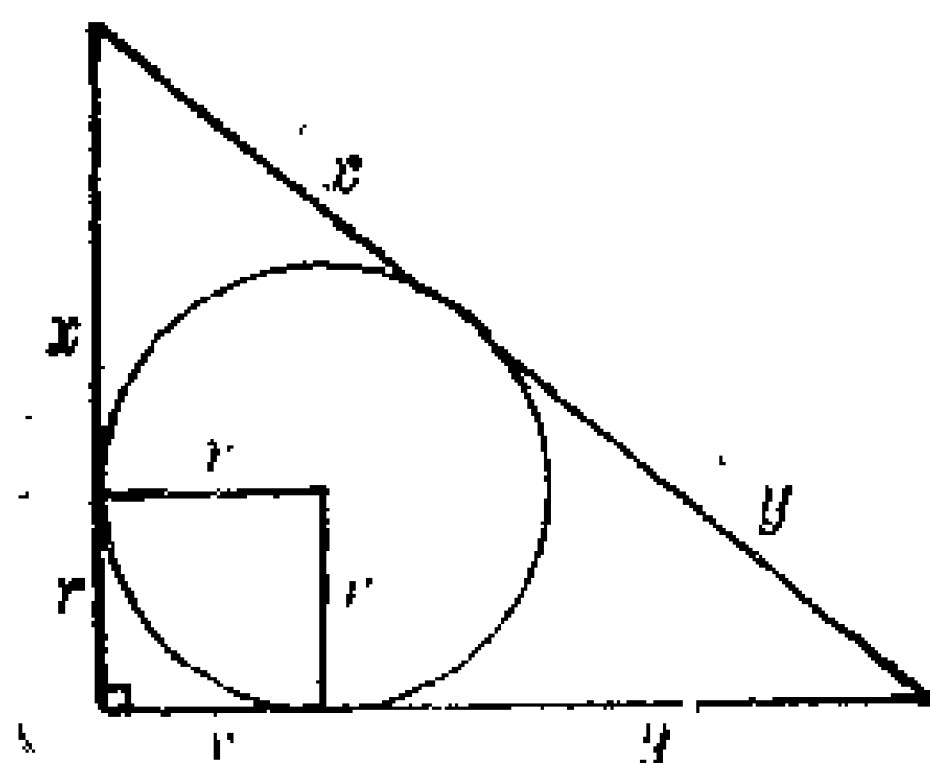


图 19

$$(r + y) - (x + y) = 2r.$$

题中重叠部分的长就是 (直角边的和) - (斜边), 由此立刻得到所要的结论.

还容易推出下面的关系. 如果在直角 $\triangle ABC$ 的斜边上作高 BD , 那么 $\triangle ABC$ 以及由 BD 分割出的两个小三角形的三条内切圆半径 r, r_1, r_2 的和等于高 BD (图20). 因为

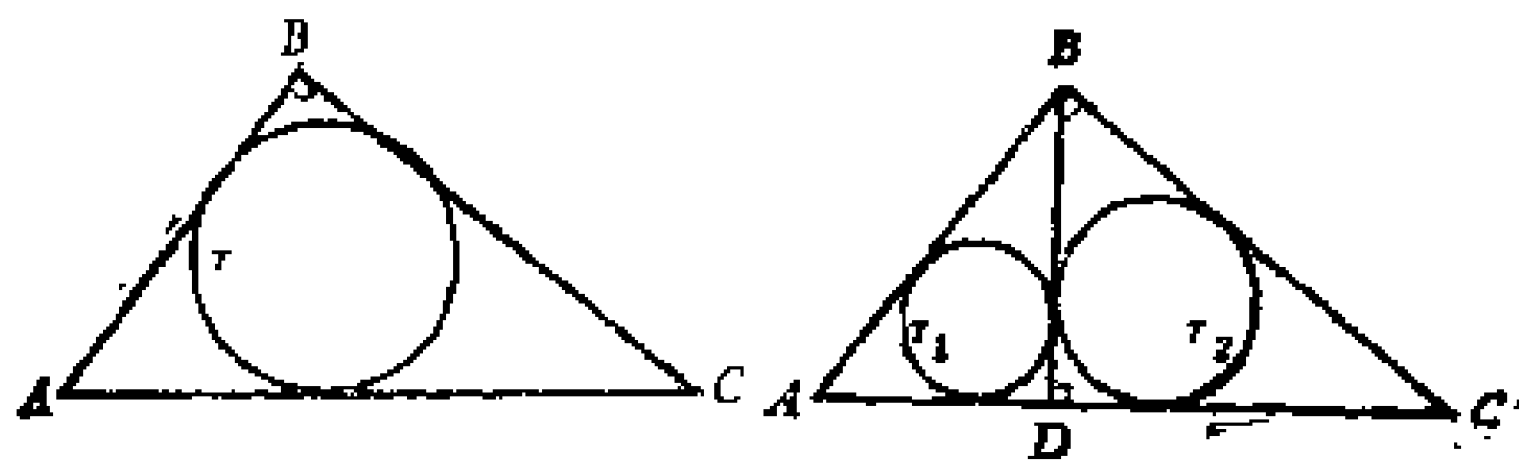


图 20

$$\begin{aligned} 2r + 2r_1 + 2r_2 &= (AB + BC - AC) \\ &\quad + (AD + BD - AB) + (BD + DC - BC) \end{aligned}$$

$$= (AD + DC) - AC + 2BD,$$

所以

$$r + r_1 + r_2 = BD$$

十五、 4444^{4444}

的位数

设 4444^{4444} 的十进位表示中各位数之和为 A ， A 中各位数之和为 B ，问 B 中各位数之和是多少？

解答 若自然数的常用对数在 $k-1$ 与 k 之间，则此自然数是 k 位数。现在

$$\log_{10} 4444^{4444} = 4444 \log_{10} 4444.$$

用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，我们便看出 4444^{4444} 的位数为

$$N = [4444 \log_{10} 4444] + 1.$$

因 $4444 < 10^4$ ，故 $\log_{10} 4444 < 4$ ，从而

$$N \leq 4444(4) + 1 < 20,000.$$

因为每位数都是9或小于9，所以 $A < 20,000(9) < 199,999$ 。但是199,999的各位数之和大于任何一个小于199,999的自然数的位数之和。因之，

$$B = (A \text{ 的位数之和}) < 1 + 5(9) = 46.$$

于是 B 的位数之和 S 不能大于12，而12是不超过45的全部自然数的位数和中最大的一个和（即39的位数之和）。

由于一个数与其位数和模9同余，因此

$$4444^{4444} \equiv A \equiv B \equiv S \pmod{9}.$$

现在取模9有

$$\begin{aligned} 4444^{4444} &\equiv (-2)^{4444} \equiv (2)^{4444} \equiv 2(2^8)^{1452} \\ &\equiv 2(-1)^{1452} \equiv -2 \equiv 7. \end{aligned}$$

因之， $S \equiv 7$ ，这意味着 $S = 7$ ，因为7是不超过12的数中唯一的一个与7模9同余的数。

十六、方 程

$$\sigma(n) + \varphi(n) = n \cdot d(n)$$

人们时常提到，著名的方程 $e^{\pi i} = -1$ 把整个数学中最重要的四个数联系起来了，方程

$$\sigma(n) + \varphi(n) = n \cdot d(n)$$

稍逊色一点，但却把初等数论中三个最突出的函数联系在一起了：

$\sigma(n)$ —— n 的正因子之和，

$d(n)$ —— n 的正因子之个数，

$\varphi(n)$ ——尤拉 φ 函数，即自然数 m 之个数， m 与 n 互素 $[(m, n) = 1]$ ，并且 $m \leq n$ 。

当然，你也可以想把哪些函数拉在一起就把哪些函数拉在一起，拼凑出一个数学关系，不过这里要请你证明一个令人吃惊的事实：方程 $\sigma(n) + \varphi(n) = n \cdot d(n)$ 是 n 为素数的充要条件。

解答 (i) 设 n 为素数，则 n 的因子有 1 与 n ，故 $\sigma(n) = n + 1$ ， $\varphi(n) = n - 1$ ， $d(n) = 2$ 。这时

$$\sigma(n) + \varphi(n) = 2n = n \cdot d(n),$$

因此，条件是必要的。

(ii) 设 $\sigma(n) + \varphi(n) = n \cdot d(n)$, 且 n 不是素数. $n = 1(1+1 \neq 1 \times 1)$ 不满足此方程, 这表明 $n \geq 2$.

$n > 1$ 时, $\varphi(n)$ 不包括数 n 自身, 故有

$$\varphi(n) < n.$$

因为 n 是复合数, 它必然至少有三个因子. 用 k 表示 $d(n)$, 则 n 的正因子表成

$$d_1 = 1 < d_2 < \cdots < d_k = n$$

由于 $k = d(n) \geq 3$, 所以因子 d_2 不是最大因子, 因而

$$d_2 < n \quad \text{且} \quad n - d_1 \geq 1.$$

由此得出

$$\begin{aligned} n \cdot d(n) - \sigma(n) &= kn - (d_1 + d_2 + \cdots + d_k) \\ &= (n - d_1) + (n - d_2) + \cdots + (n - d_k) \\ &\geq (n - 1) + 1 + 0 = n > \varphi(n) \end{aligned}$$

这表明不能有 $n \cdot d(n) - \sigma(n) = \varphi(n)$. 这个矛盾证明了 n 必须是素数.

或许天字第一号的著名素数条件是下面的威尔逊(Wilson)定理:

n 整除 $(n-1)! + 1$ 的充要条件是 n 为素数.

1965年美国数学月刊登载了下面E1702号问题. 它是弗吉尼亚州邱及瀑布城的道格拉斯·林德(Douglas Lind)提出, 而由哥伦比亚大学的肯尼思·克拉默(Kenneth Kramer)与布鲁克林大学

的斯蒂文·明斯卡(Steven Minsker)解决的.

试证明, n 整除 $N = \sum_{r=1}^{n-3} r(r!)$ 的充要条件是 n

为素数.

解答 我们有 $N = 1(1!) + 2(2!) + \cdots + (n-3)$
 $[(n-2)!]$.

由 $r(r!) = (r+1)r! - r! = (r+1)! - r!$, 便得

$$N = (2! - 1!) + (3! - 2!) + (4! - 3!) + \cdots \\ + [(n-2)! - (n-3)!] = (n-2)! - 1.$$

通乘以 $n-1$, 再在两端加上 n , 得

$$(n-1)N + n = (n-1)! + 1.$$

根据威尔逊定理, n 是素数的充要条件为 n 是 $(n-1)! + 1$ 的因子, 上面最末的方程表明当且仅当 n 为 N 的因子时这一点才成立, 因为 n 与 $n-1$ 总是互素的.

十七、关于 k 云

平面上有一条带 S ，宽为 w ，我们把单位圆放在带 S 中，不让圆内之点相重。如果横穿 S 带的任一直线至少与 k 个圆相交（包括相切），就说这些圆构成了一朵 k 云。试证明，对一朵2云， $w \geq 2 + \sqrt{3}$ （图21）

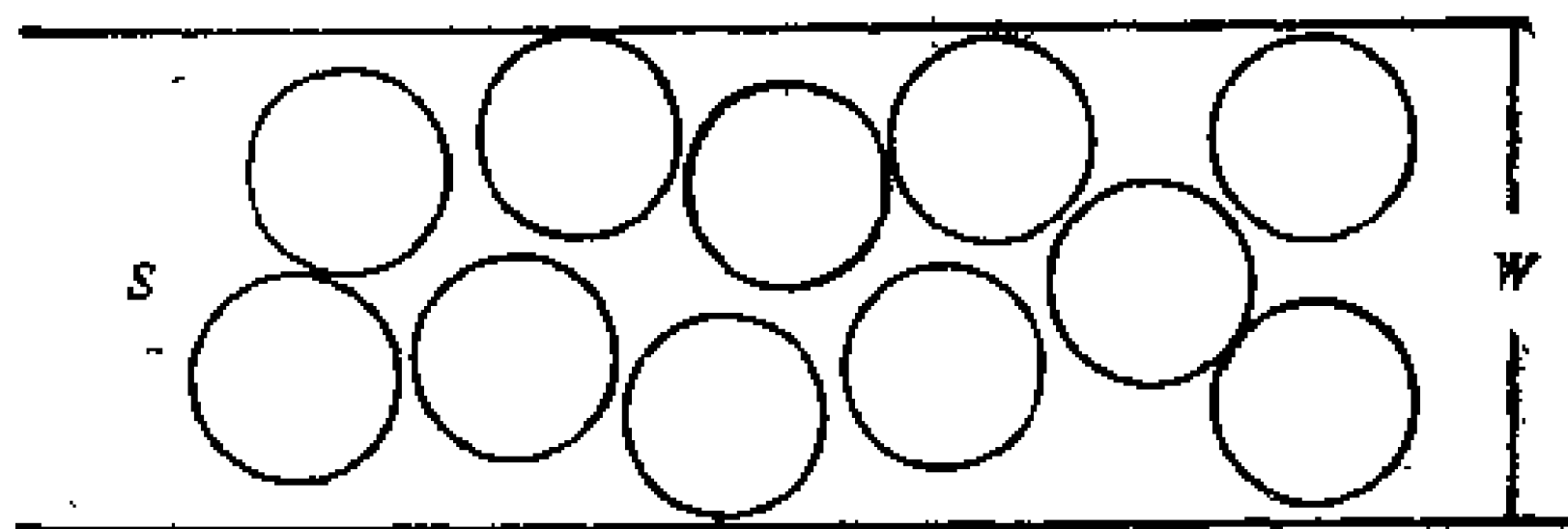


图 21

解答 通过2云中任一圆 C 的圆心 O ，作一直线 m 与 S 的平行线交成直角（图22）， m 必定会与另一个圆 A 相交，用 Q 表示从 A 的圆心 P 到直线 m 的垂足。因 m 与 A 相交，故 PQ 不会比半径长，即 $PQ \leq 1$ ，又因 C 与 A 不重叠，故 $OP \geq 2$ ，由商高定理有

$$OQ = \sqrt{OP^2 - PQ^2} \geq \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}.$$

因 S 必须在 OQ 两侧至少延长一段等于半径的距离

才能容纳得下 A 与 C , 所以 S 的宽为

$$w \geq 2 + OQ \geq 2 + \sqrt{3}.$$

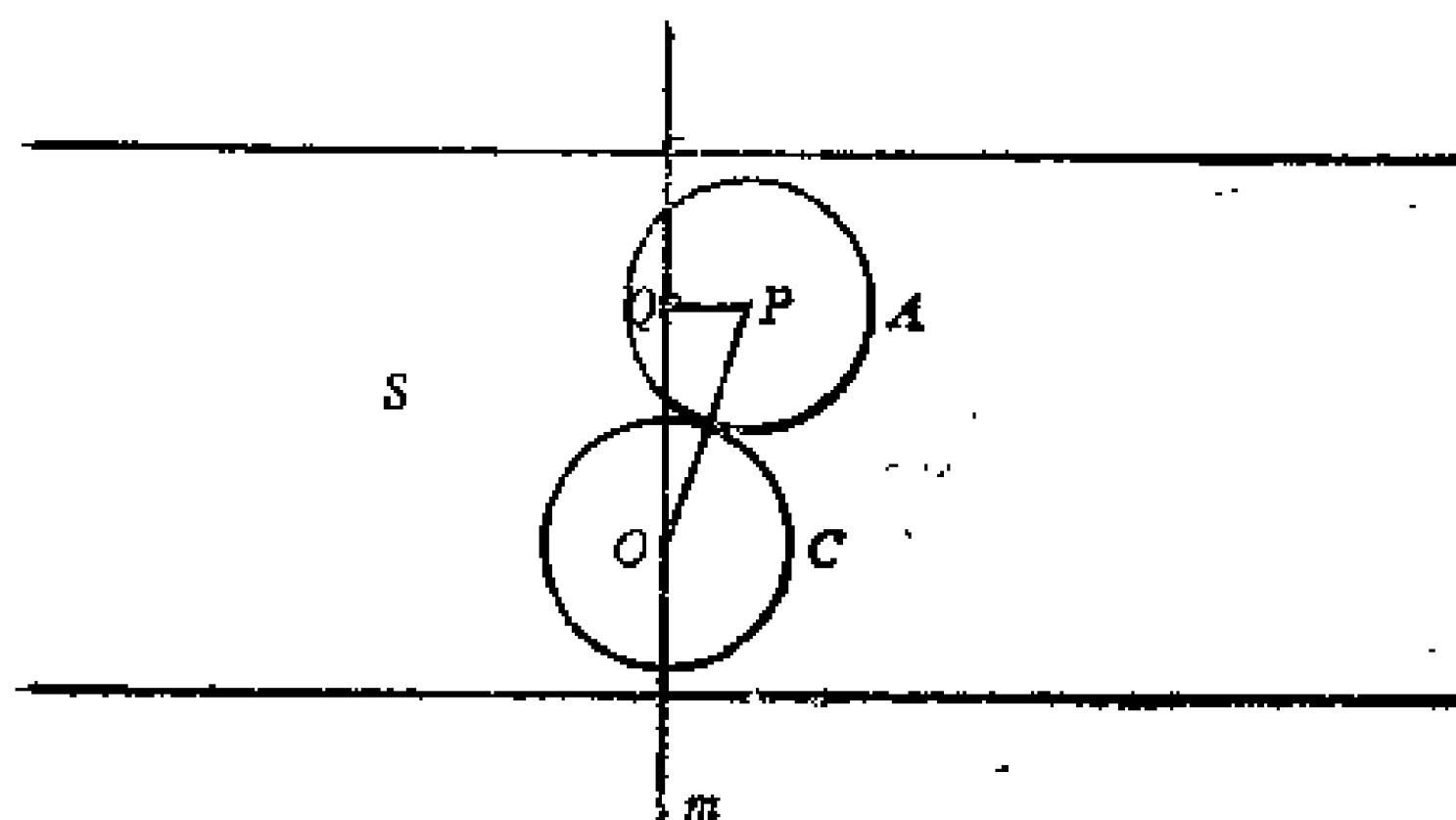


图 22

十八、极小和

由集合 $(1, 2, 3, \dots, n)$ 中抽取 a_i ，允许重复，可以得到 n^k 个不同的 k 数组 (a_1, a_2, \dots, a_k) 。任一 k 数组中最小的数用 a_i 表示。试证明下面这个意想不到的结果：全部最小的 a_i 之和就是前 n 个自然数的 k 次幂之和 $1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$ ，即

$$\sum \min(a_1, a_2, \dots, a_k) = \sum_{m=1}^n m^k$$

解答 本题解决得很漂亮，只用到最基本的概念。这个概念太简单，平常少有用到。在对自然数 r_i 的级数求和时，数数的方式可以是确定 ≥ 1 的项的项数， ≥ 2 的项的项数， \dots 等等。

$\sum r_i = (\geq 1 \text{ 的项数}) + (\geq 2 \text{ 的项数}) + \dots$
按这种数法，一个数 r 会在 r 个项中都数到，因此计入了总和之中。例如 $r=3$ 就在

$(\geq 1 \text{ 的项数}), (\geq 2 \text{ 的项数}), (\geq 3 \text{ 的项数})$
中被计过数，但在以后的项中就数不到了。这个操作步骤相当于迅速巡视一个级数，从每一项（只要

这一项还剩有数可以交出来) 挑出 1 来, 每巡视一次得到一个和, 然后再把全部和 加在一起. (就好像把 r 看成是一札 r 根火柴棒.)

实际上很容易计算本题中和数的项数, 它至少应等于一个整数 t . 显然我们有

$$\min(a_1, a_2, \dots, a_k) \geq t$$

的充要条件是 k 数组的每个 $a_i \geq t$. 有这条性质的 k 数组的个数就是从 $(t, t+1, \dots, n)$ 中取 a_i 所组成的 k 数组的个数. 因为每个 a_i 都有 $n-t+1$ 个选法, 故这种 k 数组的个数就是 $(n-t+1)^k$, 因此

$$(\geq t \text{ 的项数}) = (n-t+1)^k,$$

从而本题所求的和为

$$\begin{aligned} \sum \min(a_1, a_2, \dots, a_k) &= \sum_{t=1}^n (\geq t \text{ 的项数}) \\ &= \sum_{t=1}^n (n-t+1)^k \\ &= n^k + (n-1)^k + \\ &\quad (n-2)^k + \dots + 1^k \end{aligned}$$

伊凡·尼文 (Ivan Niven) 教授把上面的推证作得更为完美. 他首先确定, 具有极小 $\geq t$ 的 k 数组的个数为 $(n-t+1)^k$ 由此公式得出极小 $\geq t+1$ 的 k 数组的个数为 $(n-t)^k$. 极小正好是 t 的 k 数组的个数就等于 $(n-t+1)^k - (n-t)^k$, 在本题的总和中公项就是 $t [(n-t+1)^k - (n-t)^k]$. 对 $t=1, 2,$

..., n 求和得

$$\begin{aligned} & 1[(n)^k - (n-1)^k] + 2[(n-1)^k - (n-2)^k] + \\ & 3[(n-2)^k - (n-3)^k] + \cdots + n[1^k - 0^k] \\ & = n^k + (n-1)^k + (n-2)^k + \cdots + 1^k \end{aligned}$$

确定 $\sum \max(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的值, 读者可能会感到是非常有趣的一道练习题.

十九、 7^{9999} 的

最后三位数

7^{9999} 的最后三位数是哪三个数字？

解答 注意 $7^4=2401$ ，因此

$$7^{4n}=(2401)^n=(1+2400)^n=1+n\cdot 2400+C_n^2\cdot 2400^2+\cdots,$$

上面的二项展开式中从第二项以后起，所有的项写成数字时末尾都至少有四个零，因此都不会影响到结果的最后三位数字。最后三位数字由

$$1+n\cdot 2400=24n\cdot 100+1$$

来决定。如果 $24n$ 的最后一位数是 m ，则

$$24n\cdot 100+1=(\cdots m)100+1=\cdots m01,$$

即以 $m01$ 结尾。 $n=2499$ 时， $24n$ 以6结尾，于是我们知道

$$7^{4n}=7^{9996} \text{ 以 } 601 \text{ 结尾}$$

因为 $7^3=343$ ，故得

$$7^{9999}=7^{9996}\cdot 7^3=(\cdots 601)(343)=\cdots 143,$$

(直接算乘法) 得出最后三位数字是143.

其实我们满可以这样来解答：当 $n=2500$ 时， $24n$ 以0结尾，又有 $7^{10}=7^{10000}$ 以001结尾，于是

$$7^{10000} = \cdots 001 = \cdots 000 + 1 = 1000k + 1$$

由上式可得 $7^{10000} = 1000(k-1) + 1001$ 。除以7得

$$7^{0000} = \frac{1000(k-1)}{7} + 143.$$

因为右端必须是整数，故7必定整除 $1000(k-1)$ 。但7不能整除 1000，故必整除 $k-1$ ，因而对某个整数 q ，我们有 $7^{0000} = 1000q + 143$ 。由于 $1000q$ 以000结尾，所以知道 7^{0000} 最后三位数字是143。

二十、掷骰子（一）

标准骰子各面分别标有1, 2, 3, 4, 5, 6, 重复掷之, 直至连续计算的和超过12为止. 问最可能出现的和是多少?

解答 考虑倒数第二次掷的那一次. 这次的总和一定是12, 11, 10, 9, 8, 7中之一. 若和为12, 则最终出现13, 14, 15, 16, 17, 18之中的任何一个, 并且出现的机会均等. 类似地, 若最终的和数出现之前的和是11, 则最终的和应为13, 14, 15, 16, 17里的一个, 每个出现的机会相同, 以此类推. 在每种情况都可能出现13, 而且也只有13才在每种情况下有出现的可能, 因此最可能出现的和数是13.

一般, 用同样的推论可以证明, 首次出现超出数 n ($n \geq 6$) 的最可能的和数是 $n + 1$.

二十一、穿刺

立方体

一个 $20 \times 20 \times 20$ 的实心立方体 C 由2000块 $2 \times 2 \times 1$ 的砖砌成。试证明这个立方体能够被与它的一个面垂直的一条直线刺穿，这条直线要通过立方体的内部但却不会穿过任何一块砖。

解答 我们来考虑 C 中的8000个单位立方体。在 C 的每个面上，单位立方体的棱组成了一个 20×20 格子。在一个面的内部，格子中有 $19(19) = 361$ 个点，垂直于这个面，并通过这些点的361条直线顺着一排单位立方体的棱一直穿到对面相应的格子点。刺穿 C 的内部的这种直线总共有 $3(361) = 1083$ 条。令 L 表示它们中的任一条。

过直线 L ，并平行于 C 的面的两张平面把 C 分为四个长方体，每个长方体都有一条棱是 L 。令 A 表示四个长方体中的某一个（图23）。由于 A 的维数之一是20（即 C 的整条棱）， A 必然包含偶数个单位立方体。一块 $2 \times 2 \times 1$ 的砖可能会有1个、2个或4个单位立方体在 A 中，但决不会有一块砖正好有三个单位立方体在 A 中。出现2或4个单位立方体的砖总

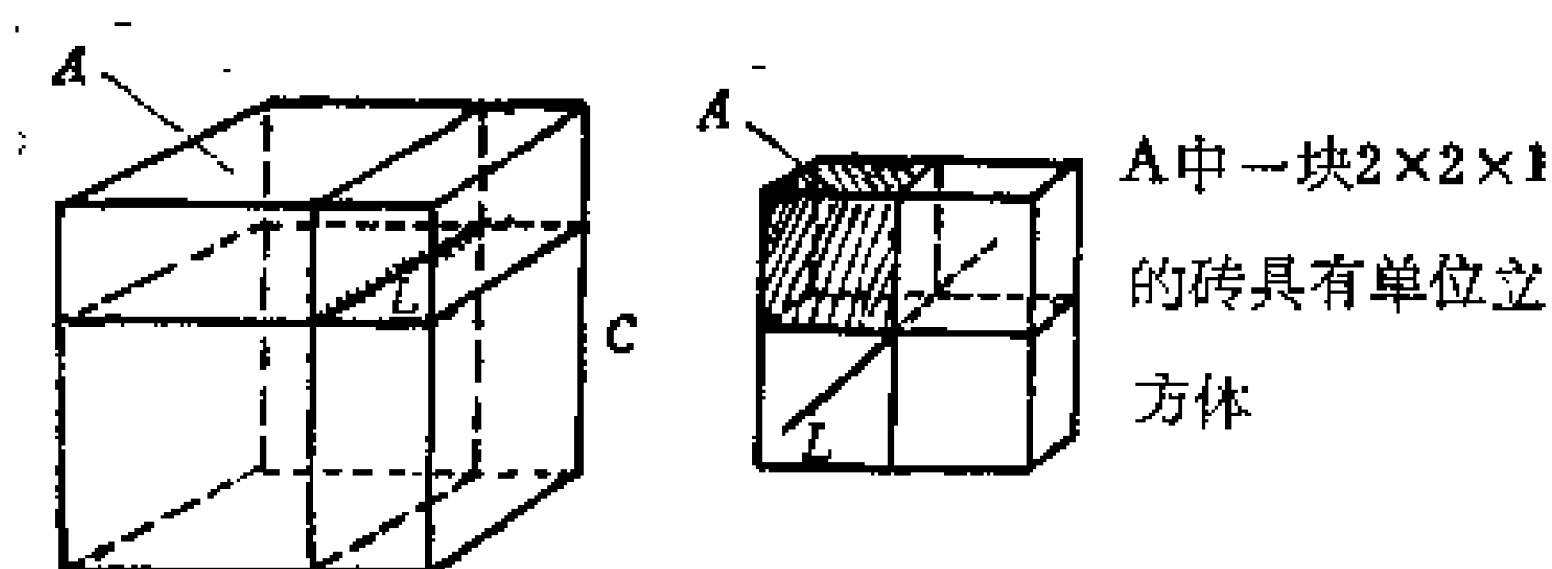


图 23

共给了 A 偶数个单位立方体。因此必然有偶数块砖只给了 A 一个单位立方体。但是只有一个单位立方体在 A 中的砖必定会被 L 从正中穿过（沿着四个单位立方体的公共棱）。因此 L 必定刺穿偶数块砖。

然而，一块砖只能被一条直线 L 穿过。实际上每块砖的确被一条也仅仅是一条直线 L 穿过，一共穿了 2000 处。由于直线 L 共有 1083 条，每条穿过偶数块砖，故不是全部 L 都能穿过两块砖。至少有 83 条直线 L 根本不穿过任何一块砖。

二十二、二重序列

对某个自然数 n ，可以构造出一个序列，使得 $1, 2, \dots, n$ 的每一个都出现两次，但每个数 r 第二次出现必须是在距第一次出现的第 r 个位置处。例如， $n=4$ 时有

4, 2, 3, 2, 4, 3, 1, 1.

$n=5$ 时有

3, 5, 2, 3, 2, 4, 5, 1, 1, 4.

$n=6$ 或 7 时不存在这种排列法， $n=8$ 时有

8, 6, 4, 2, 7, 2, 4, 6, 8, 3, 5, 7, 3,

1, 1, 5. 试证，除非 $n \equiv 0$ ，或 $1 \pmod{4}$ ，否则不存在这样的序列。

解答 把这种序列中的位置编上号： $1, 2, 3, \dots, 2n$. 假设 1 第一次出现的位置是 p_1 ， 2 第一次出现的位置是 p_2 ，等等。于是 1 第二次出现在 $p_1 + 1$ 处， 2 第二次出现在 $p_2 + 2$ 处，等等。表示位置的数目之和既可以写为

$$1 + 2 + 3 + \dots + 2n$$

也可以写为 $(p_1 + p_1 + 1) + (p_2 + p_2 + 2) + \dots$

$$+ (p_n + p_c + n),$$

因此

$$\frac{2n(2n+1)}{2} = 2(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) + \frac{n(n+1)}{2},$$

令 $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = P$, 则

$$\frac{2n(2n+1)}{2} = 2P + \frac{n(n+1)}{2},$$

于是得

$$\begin{aligned} P &= \frac{2n(2n+1) - n(n+1)}{4} \\ &= \frac{3n^2 + n}{4} = \frac{n(3n+1)}{4}. \end{aligned}$$

因为 P 是整数, 故 $n(3n+1)$ 必定能被 4 整除, 然而在 $n \equiv 2$ 或 $3 \pmod{4}$ 时, 我们得到 $n(3n+1) \equiv 2 \pmod{4}$, 这是个矛盾. 因此, 除非 $n \equiv 0$ 或 $1 \pmod{4}$, 否则不存在满足题意要求的序列.

D.C.B. 马什 (Marsh) 在解答 (见文献) 中证明了, 对每个 $n \equiv 0$ 或 $1 \pmod{4}$ 的确存在一个如题所说的序列.

现在来考虑上述问题的一个姊妹问题: 把 $1, 2, \cdots, n$ 排成一排, 除了第一个数可以随便挑选外, 要使数 k 排入此排内必须有 $k-1$ 或 $k+1$ 排在前面 (不必紧靠在前面). 问这种排法有多少? 例如 $n=6$ 时合格的安排法中有

435261与342156.

解答 设第一个数是 r ，这就把 $1, 2, \dots, n$ 分成了两组：

$$A = (1, 2, \dots, r-1) \text{ 及}$$

$$B = (r+1, r+2, \dots, n).$$

我们的规则要求 $k-1$ 或 $k+1$ 必须排在 k 的前面，这就意味着 A 中的数是按天然的递减顺序出现在排列中， B 中的数则按递增的顺序出现。显然， B 中第一个可以出现在第一个数 r 之后的数不是 $r+2$ ，因为前面没有 $r+1$ 或 $r+3$ 。同样， $r+3, r+4, \dots, n$ 中没有一个是 B 中第一个可以排在 r 后的数。反复使用这则推理可以证明， B 中的数必须按 $r+1, r+2, \dots, n$ 的顺序出现在排列中。对 A 也类似。

只要 A 与 B 中的元素在各自的小组中保持天然顺序，这两组无论怎样交叉都没关系。例如，因为 r 在第一个位置，故 $r+1$ 可以立即排在排列中，也可以在 $r-1$ 与 $r-2$ 排入排列中之后再排进去，因此以 r 开头的排法就是替 A 的 $r-1$ 个元素在剩下的 $n-1$ 个位置中挑选 $r-1$ 个位置的选法，即 C_{n-1}^{r-1} 。 B 的排好顺序的元素自然地排入空位。因为 r 可以取 $1, 2, \dots, n$ 等值，故排法总共有

$$C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \cdots + C_{n-1}^{n-1} \\ = (1+1)^{n-1} = 2^{n-1}$$

种。

二十三 分点圆

平面上给了 $2n+3$ 个点，任意三点都不共线，任意四点都不共圆。证明：一定可以找到一个圆通过已给点中的三个点，同时把剩下的点分成两半，即有 n 个点在圆内， n 个点在圆外。

解法一（由滑铁卢大学M·克朗金解决）

令 A, B 表示已知点集 T 的凸包 H 的两个相邻顶点(图24)。(关于凸包的定义见问题十一。) 由于

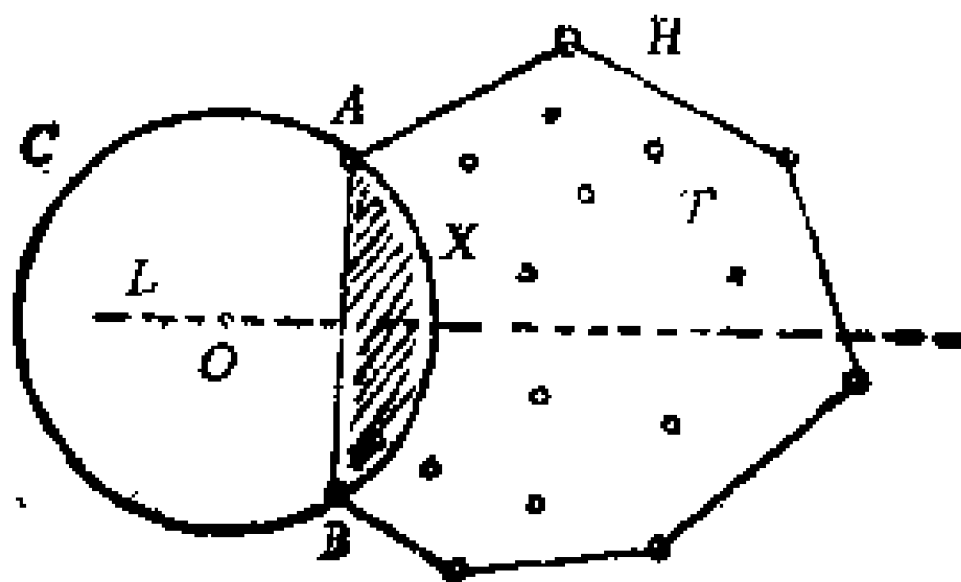


图 24

T 没有三点共线，故线段 AB 上 A 与 B 之间再无 T 的点. 假设过 A 与 B 的一个大圆 C' 的圆心 O 在 H 外面. 这时 C' 的弓形 AXB 在 H 内，可能含有 T 的某些点。

然而让 C' 变大可以使弧 AXB 无限接近 AB 。圆变大，弧 AXB 在向 AB 靠近时，那些原先在弓形 AXB 中的 T 的有限个点就不再属于弓形 AXB 。于是过 A, B 就存在任意多个圆，其弓形 AXB 连同此弧不包含 T 的点。令 C 就表示一个这种圆，其圆心为 O 。

首先我们有一个圆 C ，只通过 T 的两个点 A 与 B ，同时圆内不再含有 T 的点。现在来变动 C ，让圆心 O 沿着 AB 的中垂线向 AB 靠拢，并且不断改变半径长使圆 C 始终通过 A 与 B 。随着 O 向 AB 靠拢，弓形 AXB 越来越大，包含的 H 的点越来越多。 O 跨过 AB 时，弓形 AXB 就变成了 (AB 确定的) C 的大弓形，终于大得来把整个凸包 H 都覆盖完了，因而覆盖了整个集合 T 。由于 T 中任何四点都不共圆，故弓形只得一个一个地围进 T 的点。当圆周通过第 $n+1$ 个点 K 时，圆 C 正好把前 n 个点包含在内，并通过 A, B, K 三点。 T 的另外 n 个点仍在圆 C 之外，于是得出所要的结论。

解法二 (滑铁卢大学 L. J. 狄基) 令 O 表示任意一个已知点，考虑以 O 为心的任意圆 R 。将给定的诸点关于 R 作反演。(关于反演的解释见参考文献)。圆心 O 被反演到无穷远点，于是得到 $2n+2$ 个有限远像点的集合 S (图26)

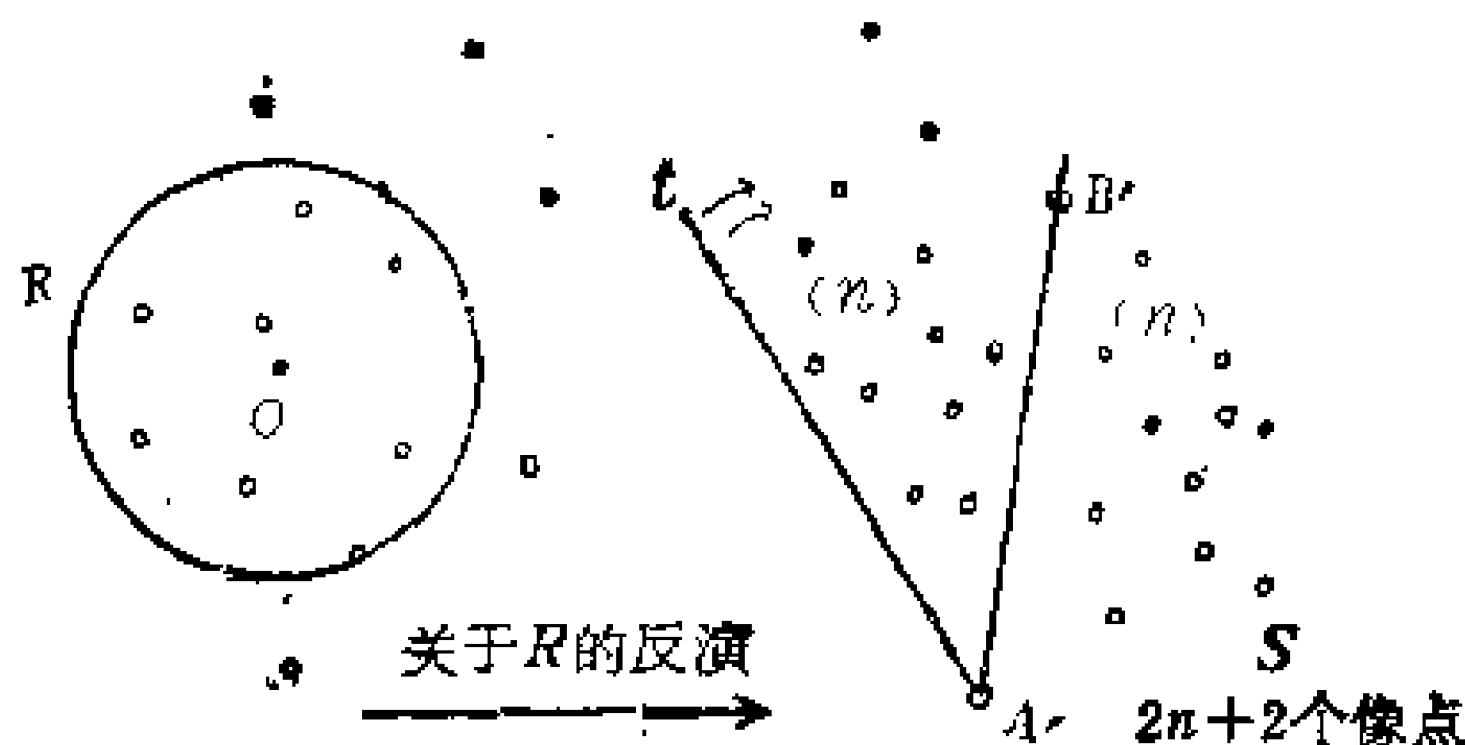


图 25

就从整个 S 在其一侧的一条直线 t 开始吧. 把 t 向 S 移动, 直至它开始通过 S 的一个点, 比如说通过 A' 点. (或者令 A' 表示 S 的凸包的顶点, t 为通过 A' 的与凸包只在 A' 相交的直线.) 现在让从 A' 起的两条射线的任意一条绕着 A' 横扫 S . 下面马上就要证明, 横扫射线将一个一个地通过 S 的点. 因此它最终会通过一个像点 B' , 使得 $A'B'$ 把 S 的其余 $2n$ 个点分为两半.

令已知集合的 A 与 B 表示 A' 与 B' 的像原. 我们看到, $A'B'$ 不可能通过反演中心 O , 否则就意味着已知集合的 A, B, O 三点共线 (这是个矛盾). 因此直线 $A'B'$ 反演前的像原必定是通过 O 的一个圆 K (图26). 从而 K 就通过已知集合的三个点 A, B, O . 因为在将 S 中的像点反演回到已知集合的点时, $A'B'$ 一侧的全部像点都反回到 K 内, 而另一侧的全部像点都反回到 K 外, 因此, K 把已知集合

线要同时通过两个（或更多个）像点，比如说同时通过 C' ， D' ，那么直线 $A'C'D'$ 的像原就会是通过 O 的一个圆（因为 $A'C'D'$ 并不通过 O ），即四个已知点 O, A, C, D 共圆（矛盾！）

参考文献

Coxeter and Greitzer, *Geometry Revisited*, vol. 19, New Mathematical Library, Math. Assoc. of America, p. 108 及以后诸页。

二十四、三角形的 边长

若 a, b, c 构成三角形的边长, 试证明 $n=2, 3, 4, \cdots$ 时, $\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{b}, \sqrt[n]{c}$ 也构成三角形的边长.

解答 若 a, b, c 构成三角形的边长, 则有三角形不等式
$$a + b > c,$$
等等. 因此

$$(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})^n > a + b > c = (\sqrt[n]{c})^n,$$

由此得

$$\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} > \sqrt[n]{c}.$$

$\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{b}, \sqrt[n]{c}$ 的另外两个三角形不等式也以同样建立起来, 从而得到我们的结论.

二十五、请勿使用 微积分

1952年，J. H. 布恰与里奥·毛塞在通俗杂志《数学文库》221—236页上发表了一篇很别致的文章《请勿使用微积分》。平常用微积分解决的一些问题，他们别具匠心地用另外的方法解决了。下面介绍几则。

(i) 第一个问题是计算半径为 a 的两个正圆柱体成直角相交（即中心轴交成直角）时公共部分的体积。稍停片刻来想象一下刚才所说的相交部分 R 。从一个圆柱体的方向上看， R 是圆的，和截出它的圆柱一样地圆。 R 的上半部分如图27所示。通过与 R 的内切球作比较很容易求出 R 的体积。显然，半径为 a 的球在两个圆柱内都能一滚而下，它也就是两

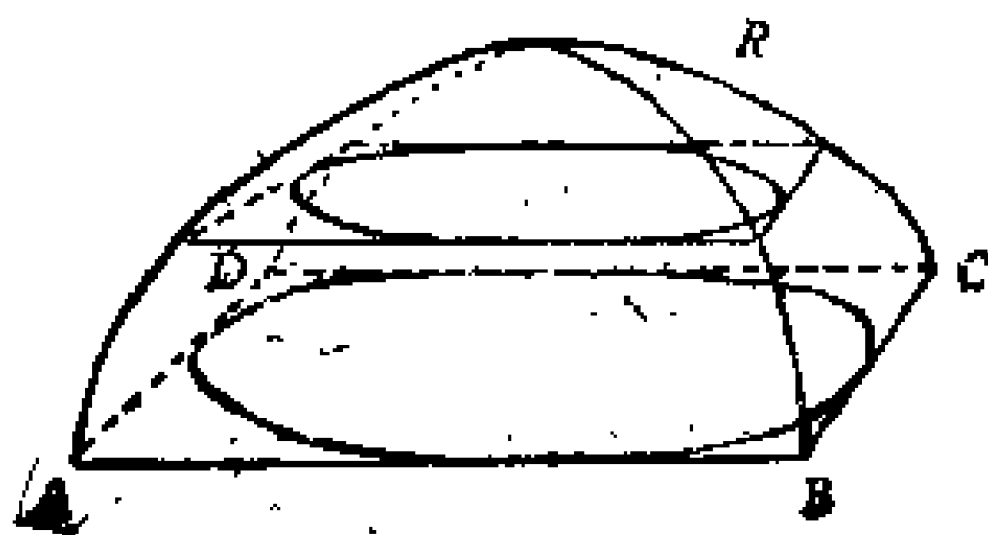


图 27

个柱体相交部分的内切球。

由于具有四重对称性，故 R 中与底 $ABCD$ 平行的任意一片含有一个正方形的底面。内切球 S 的这样一片含有一个圆形的底面，正好与 R 的相应的一片内切。正方形面积与其内切圆面积之比为

$$\frac{(2r)^2}{\pi r^2} = \frac{4}{\pi}.$$

各层求和，得到 R 的体积是 S 的体积的 $\frac{4}{\pi}$ 倍。

因此

$$R \text{ 的体积} = \frac{4}{\pi} \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \right) = \frac{16}{3} a^3.$$

当然，严格证明 $R=4S/\pi$ 要用到微积分学的基本论断，这是此处故意避开的。这类问题是根本没法绕开极限概念的，不过将 R 与 S 作比较这一点却赏心悦目，十分令人满意，其正确性也是可以严格证明的。

(ii) 过凸曲线 C 内一个已知点 P 作一条直线 L ，使得 L 从 C 割出一个面积最小的区域。解这个问题的想法也很巧。如果 P 点不是 L 的中点，那么，绕 P 点向适当的方向稍微一转，在 P 点的一侧失去的一块楔形面积就会比另一侧得到的还大，这说明割出的区域不是最小（图28）。这个古老的思考方法在解许多问题时都很有用。

从这一思路可以立即很出色地解决下面一个问题：取相距一个单位的两条纵坐标加上曲线 $y = e^x/x$ ，使得曲线下的区域面积最小。很明显，如果两条纵坐标不等长，那么，稍微移动一下使它们相等，曲线下面积就会变小些。因此，对于给定的实数 a ，为了面积最小就必须

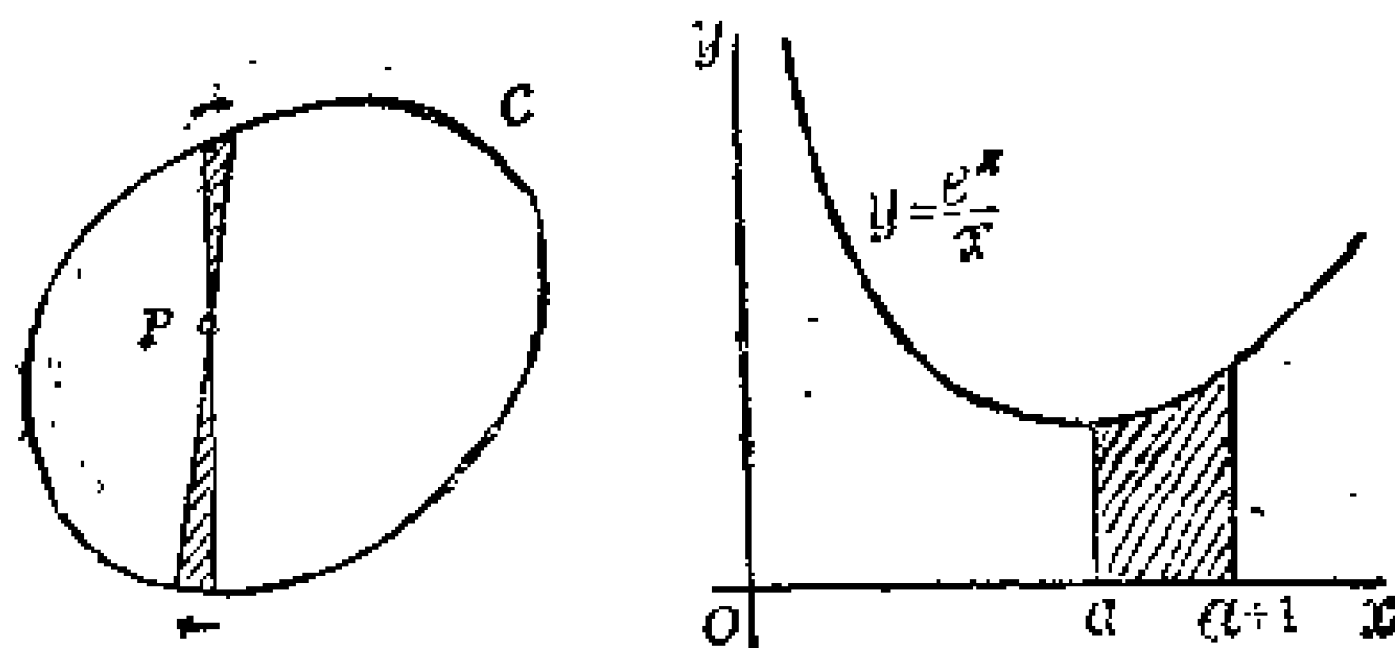


图 28

$$\frac{e^a}{a} = \frac{e^{a+1}}{a+1},$$

由此得

$$a = \frac{1}{e-1}.$$

(iii) 毛塞与布恰巧妙地利用了古典等周问题的结论：周长为 L 的所有简单 n 边形中，面积最大的是正 n 边形（所谓“简单”是指自身不交叉）。在假定这种最大 n 边形存在的前提下，辛辛那提（Cincinnati）大学已故的理查德·代玛尔（Ric-

hard DeMar) 给了一个简洁的新证明, 这篇杰出的文章登在《数学杂志》(Mathematics Magazine) 1975年 1—12页上, 主要是4—6页, 文章叫“平面上等周问题的一个简单解法”(A Simple Approach to Isoperimetric Problems in the Plane). 对于多边形要成为“正”多边形的条件, 他分为两条分别加以考虑——(1)等边, (2)等角. 两种情形的处理方法类似, 推理都很美妙, 我们仔细讨论第(1)部分予以说明.

用 $K=ABCD\cdots$ 表示一个不等边的简单 n 边形(图29), 那么, 必然有某两条相邻的边不相等,

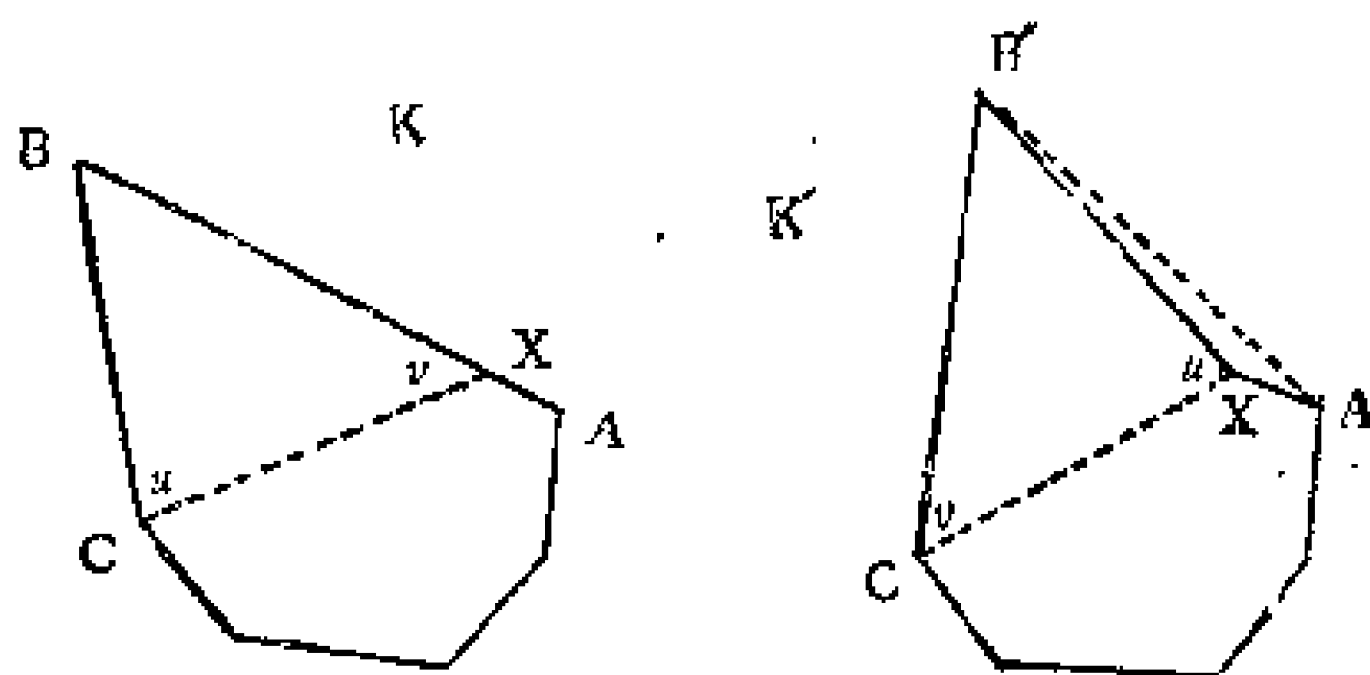


图 29

假设 $AB > BC$. 在 A 与 B 之间选一点 X , 使得 $BX > BC$, 则 $\angle u = \angle BCX > \angle v = \angle BXC$. 现在把 $\triangle BCX$ 切下来翻一转, 使 X 与 C 交换位置, 于是得到多边形 K' . 由于 $\angle u > \angle v$, X 处的角就比平角还大, 所以 K' 不再是凸多边形了. 另外还看出 K' 已

不是 n 边形而是 $n+1$ 边形了.然而因为它不是凸的,我们容易把它变成 n 边形,同时修正其面积.只消把 B 点的新位置 B' 与 A 相联结,就可以得到一个 n 边形,面积大些,周长反而小些.把图形扩张使周长等于 L ,于是面积变得更大.这说明 K 不是所要求的最大图形.

我们现在承认等周定理,然后来看布恰与毛塞如何把它用来解决一个古老的问题:一个矩形的一边是固定的墙,另外三边尚来固定,但其总长为 L ,试确定矩形的长与宽之比,使得它围成的矩形区域面积最大.无论围墙 $ABCD$ 怎么样,把它投影到固定墙 AD 之后得到的四边形 $B'BCC'$ 总有固定周长 $2L$ (图30).四边形 $B'BCC'$ 是正四边形,即正方形时面积最大,因此,它的一半 $ABCD$ 也最大.这时长为宽的二倍,问题也就解决了.

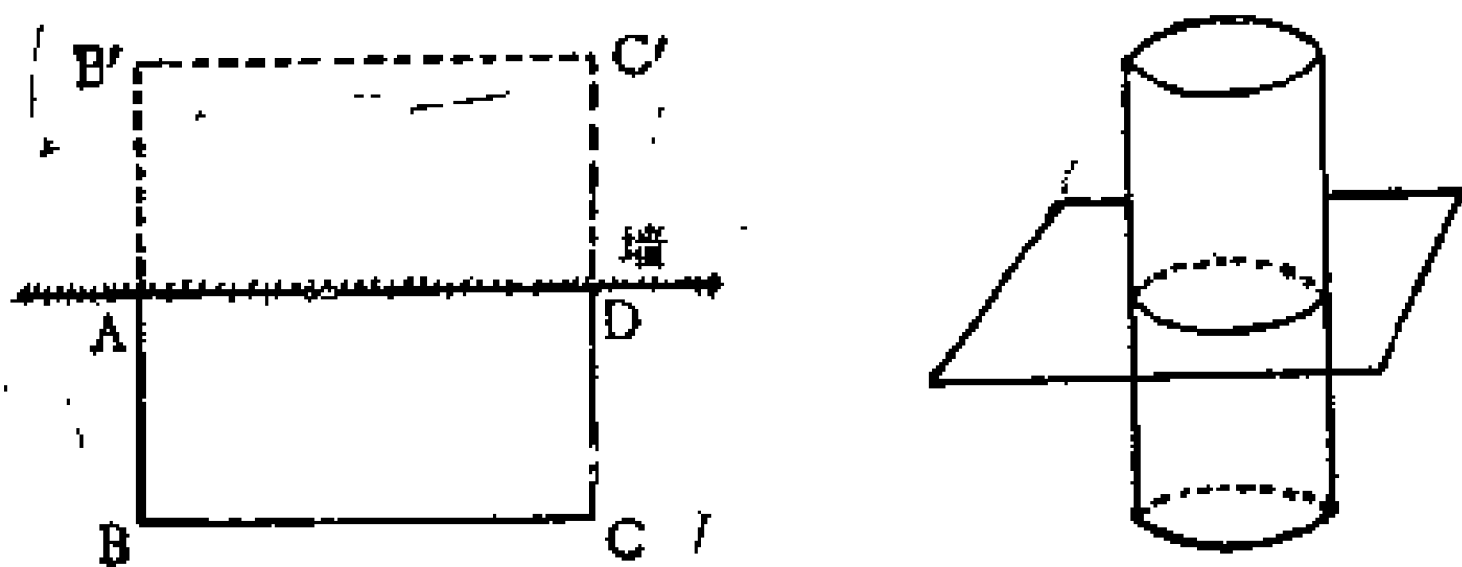


图 30

类似的问题是,给定了表面积,求容积最大的罐头盒.如果“有盖”与“无盖”两种情况中有一

个解决了，那么另外一个情况的解答很快便可得到，因为把开口罐头盒映射到上表面就得到有盖罐头盒，若无盖的最大，则有盖的也该最大。因此，无论高与半径之比 h/r 取什么值，“有盖”时的比值为“无盖”时的比值的二倍。

(iv) 作为等周问题定理的最后一个应用例子，我们再给前面的问题七（屋角的帘子）一个解法。

该问题是：在矩形房间的一角用两张4英尺长的帘子围出最大的一块地面，试确定帘子的位置。

把房角与墙作为参考系的原点与坐标轴。把帘子投射进轴的背面去，得到八边形 $PBP_1A_1P_2B_1P_3A$ ，如图31所示。不管帘子挂在怎样的位置，这

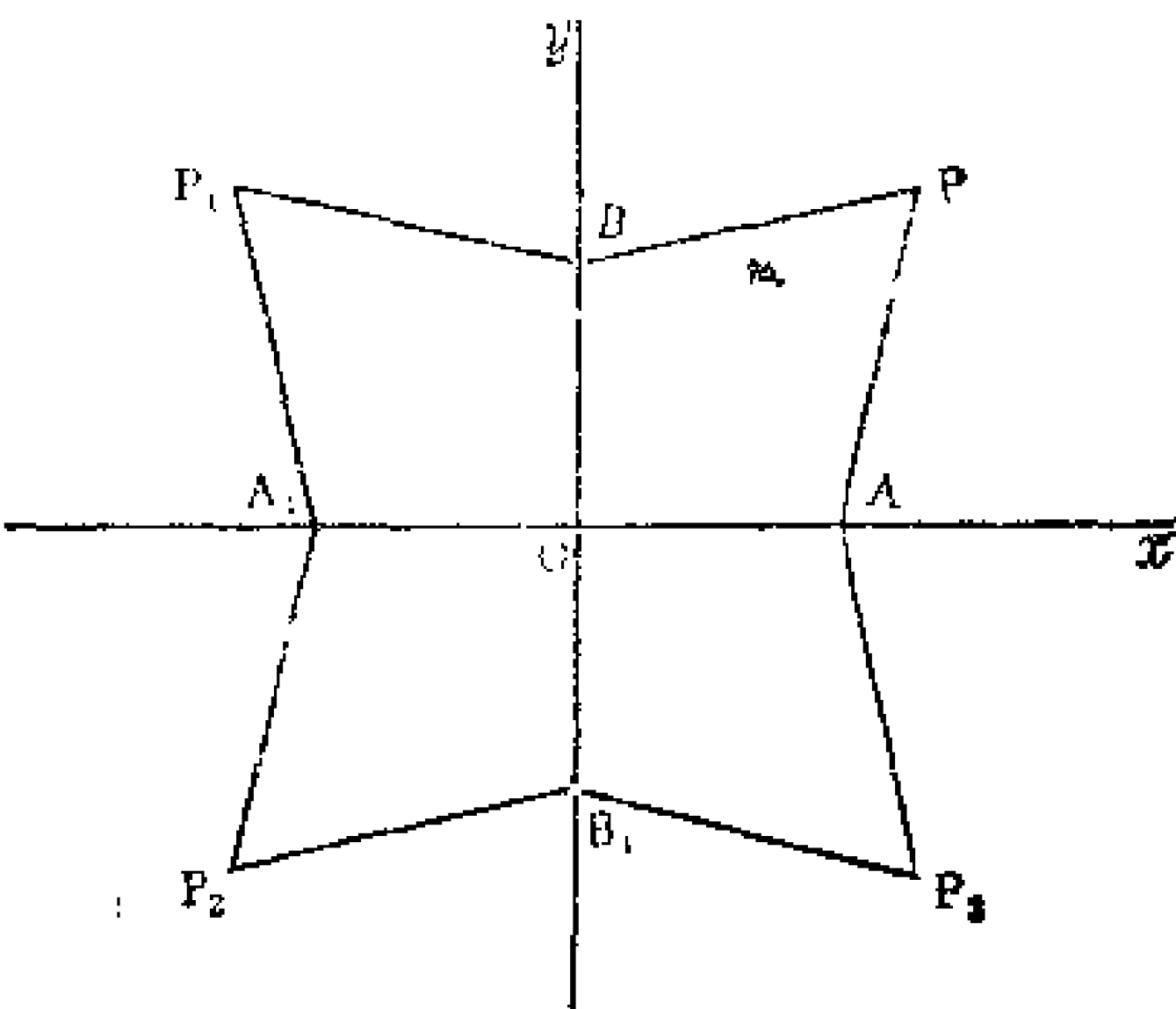


图 31

八边形都有固定的周 长 $8 \times 4 = 32$ 英尺。可以看出，在屋角围出最大的地面就相当于这八边形有最大面积，从而立刻可以得出解答。面积最大的八边形必须是正八边形，而此它的每个角为

$$\frac{1}{8}(8-2) \times 180 = 135 \text{度}.$$

通过详细地作图即容易得出结果。

二十六、 a^b 与 b^a

确定 a^b 与 b^a 孰大孰小，一般并不难。显然， $2^3 < 3^2$ ， $3^4 > 4^3$ 。然而把2和3之间的一个数与3和4之间的一个数联系在一起，问题就来了。请问： e^π 大呢还是 π^e 大？

解答 对于正的 x ，我们有

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots \\ &> 1 + x. \end{aligned}$$

因 $\pi > e$ ，故 $\pi/e > 1$ ， $x = \pi/e - 1 > 0$ 。于是

$$e^{(\pi/e)-1} > 1 + \left(\frac{\pi}{e} - 1\right)$$

$$\therefore \frac{e^{(\pi/e)}}{e} > \frac{\pi}{e}, \quad e^{(\pi/e)} > \pi, \quad e^\pi > \pi^e$$

用微积分容易证明函数 $e^x - 1 - x$ 只有一个极小值零（在 $x = 0$ 处）。因此当 x 取实数值时

$$e^x \geq 1 + x.$$

运用这个关系式，乔治·波利雅 (George Polya) 给著名的算术几何平均不等式想出了下面这个漂亮的证明。令 a_1, a_2, \dots, a_n 表示正实数， A, G 分

别示表它们的算术平均与几何平均，即

$$A = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n), \quad G = (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}$$

让 x 依次取值 $(a_i/A) - 1, i = 1, 2, \cdots, n$, 得到 n 个不等式:

$$e^{(a_1/A) - 1} \geq \frac{a_1}{A},$$

$$e^{(a_2/A) - 1} \geq \frac{a_2}{A},$$

.....

$$e^{(a_n/A) - 1} \geq \frac{a_n}{A}.$$

把这些式子相乘，得

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{A} = n \geq \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{A^n},$$

这就是

$$e^{n-1} \geq \frac{G^n}{A^n} \quad \text{即} 1 \geq \frac{G^n}{A^n},$$

由此得 $A \geq G$.

注意，只有当 n 个不等式中都取等号时，才有 $A = G$ ，这就要求对 $i = 1, 2, \cdots, n, (a_i/A) - 1 = 0$ ，故只有当全部 a_i 都等于 A 时，才有 $A = G$.

二十七、一则趣味

数学题

一个人在邮局买了一些面值1分的邮票，还有相当于所买1分邮票总价 $\frac{3}{4}$ 的若干张2分邮票，相当于2分邮票总价 $\frac{3}{4}$ 的若干张5分邮票，以及5张8分的邮票。他用一张钞票刚好把钱付清。问他每种邮票买了多少张？

解答 设这个人买了 y 张1分的邮票，那么他就买了 $\frac{3y}{4}$ 张2分的邮票， $\frac{9y}{16}$ 张5分的邮票。因为 $\frac{9y}{16}$ 是整数，故16必定整除 y ，从面对某个整数 x ，我们有 $y=16x$ ，于是买邮票的情况就是： $16x$ 张1分的邮票， $12x$ 张2分的邮票， $9x$ 张5分的邮票，5张8分的邮票。假定他用的是一张 K 元面值的钞票付清邮票钱，那么邮票价钱是

$$16x + 2(12x) + 5(9x) + 8(5) = 100K,$$

于是

$$85x + 40 = 100K, \quad 17x = 20K - 8$$

$$x = \frac{20K - 8}{17} = K + \frac{3K - 8}{17}$$

因为 x 与 K 是整数，所以 $(3K-8)/17$ 也必须 是整

数。但 K 必须是 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 1000, 10000 里面的某一个数^①。能使 $(3K-8)/17$ 为整数的 K 只有 $K=1000$ ，因此这个人买了

18,816 张 1 分的邮票； 14,112 张 2 分的邮票；
10,584 张 5 分的邮票； 5 张 8 分的邮票。

① 这些数字是美元的面值——译者

二十八、球面上的 地图

考虑球面上的一幅地图 M ，假定 M 的每个顶点处恰好有三个国家，这些国家的边界线没有一条是闭环（也就是说，每条边界至少包含两个顶点）。用四种颜色 A, B, C, D 来着色地图，使得凡有一段公共边界的国家都着上不同的颜色。地图上的一切区域我们都用“国家”这个术语来称呼，至于哪些真的是国家，哪些是水域，我们不在乎。

如果一个国家的边界上的弧的条数是奇或偶，我们便称这个国家是奇或偶。试证明：涂上两种指定的颜色，比如 A 色与 B 色中的一种的 奇国的总数一定是偶数。

解答 这个问题看来是很困难的，因为即使我们知道某个国家涂的是 A 色，也要在我们发现了它是奇或是偶之后才知道是否应该把它算在内。下面要介绍的巧妙思想会帮我们的大忙。每个顶点都含于一个小三角形中，如图 32 所示（顶点 v 和过 v 点的每段弧的一小段被抹去了，把自由端联结起来构成一个三角形）。当然，这样就在每个顶点处额外

增添了一个三角形国家，使我们有了一幅新地图 M' 。虽然四种颜色中已有三种出现在 v 处，但是仍旧留下了第四种颜色供新三角形涂用。这样就可以按照邻国颜色不同的原则给新三角形涂色，还请注意，在新地图 M' 中每个顶点处仍然恰好有三个国家。

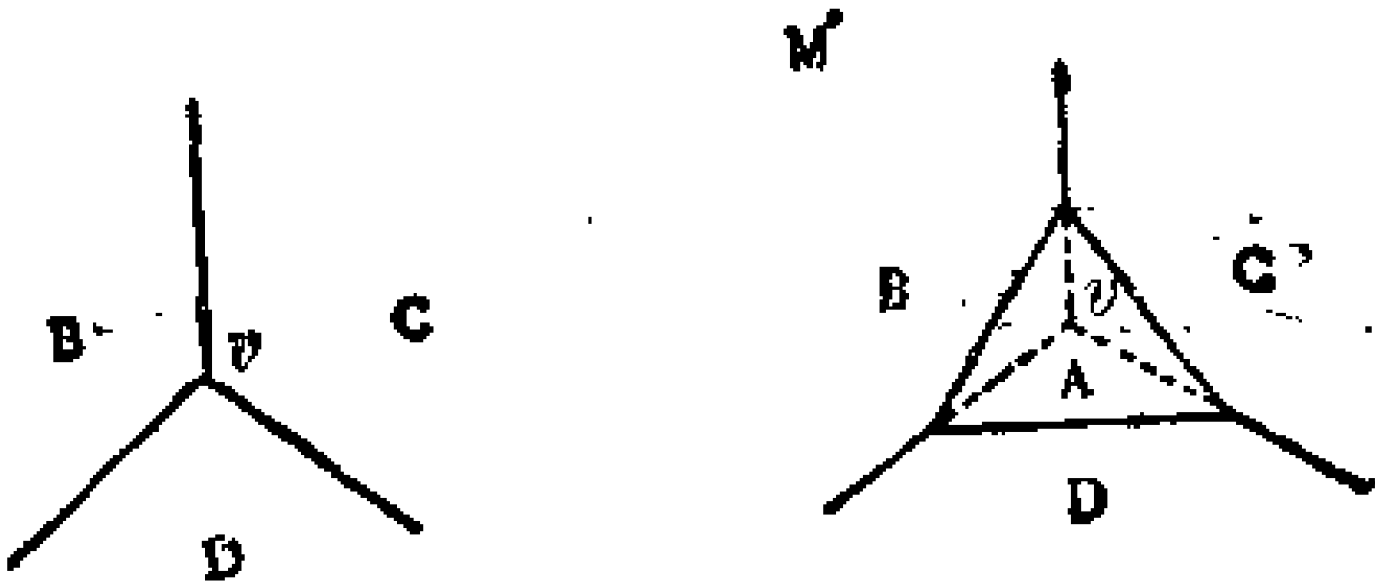


图 32

M' 的作用有两个，分别说明如下. 新三角形的一条边也是原有的一个国家的新边，这样就把一个奇国变成了偶国，偶国变成了奇国。于是，在顶点 v 画一个新三角形时，在 v 处的三种颜色的每一种的奇区域数目变动了1（或多1或少1）。因为新三角形本身成了第四种颜色的一个奇国，所以对于四种颜色的每一种，奇国个数变动了1。就两个颜色来说，它们的奇国个数的总变化为 2，0 或 -2，这要由每个颜色的奇国数的变化是增加还是减少来决定。但是不管怎样，对任意两种颜色来说总变化是一个偶数。因此涂成 A 色或 B 色的奇国，新数目与

老数目有相同的奇偶性。对所有的顶点情况都是这样。因此画出 M' 后，涂 A 色或 B 色的奇区域的总数是奇是偶，就同开始时 M 中的情况一样，于是我们可以通过研究地图 M' 得到想要的结果。

其次，通过画出 M' ，使 M 的每个国家周围的边界数翻了一番。因此在 M' 中先前的所有国家都成了偶国，只有新三角形是奇国。我们想要证明， M' 中涂 A 色或 B 色的新三角形的数目是偶数。

实际上现在的确用不着画小三角形了，因为它们涂的是 v 处不出现的颜色，所以只消把 M 的每个顶点标上那里没有的颜色就可以了。现在就假定已经这样办了，我们要证明标上 A 色或 B 色的顶点总数是偶数。

为此目的，我们来研究把涂 C 色与 D 色的国家隔开的一段弧。这种“分界弧”两端的顶点不能标上 C 色或 D 色，因为这两种颜色就在这两个顶点处（图33）。因此分界弧的端点必须用 A 或 B 作色

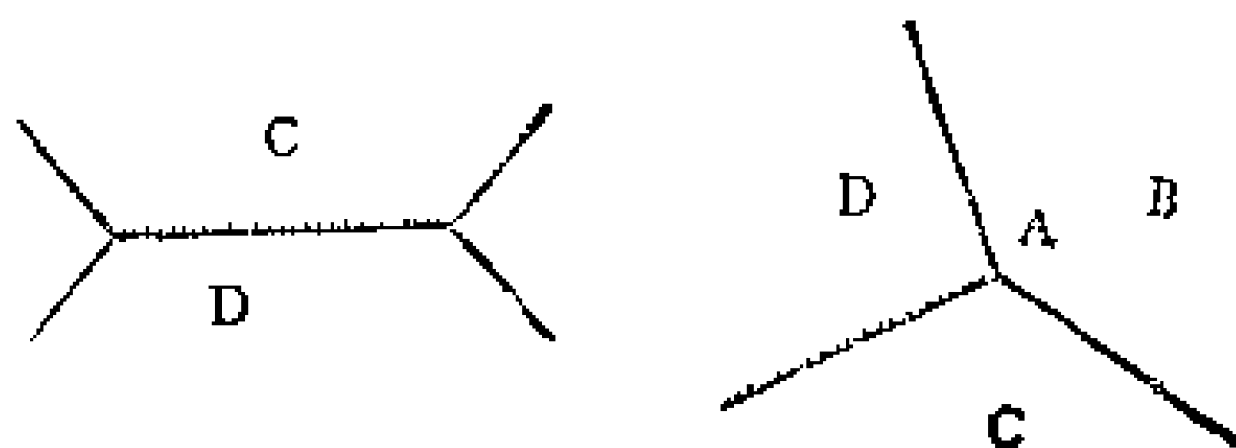


图 33

标，以代表这样的两个顶点。另一方面，如果有一

个顶点标了 A 色或 B 色，那么 C 和 D 必定就属于此顶点处的国家上涂的三种颜色。这样，这种顶点处有一条边界必然是分界弧。于是我们知道，分界弧的两端要么是 A 要么是 B ，并且这些分界弧代表了色标为 A 或 B 的全部顶点。

我们推理的最末一步是：任何两条分界弧都无公共端点。这一点可以立即加以证明。假设两条分界弧在（比方说）色标为 A 的顶点处相交，那么此顶点处的三个国家颜色一定是 B, C, D 。但是颜色为 B 与 C 的两国间的边不是分界弧；颜色为 B 与 D 的两国间的边也不是分界弧。因此在色标为 A 的顶点外不可能有一条以上的边是分界弧。

这就表明所有分界弧是隔开的。色标为 A 或 B 的顶点总是成对出现，从而它们的总数是偶数。

二十九、平面上的 凸区域

证明平面上面积为 π （或大于 π ）的任何闭凸区域都有距离为2的两个点（图34）

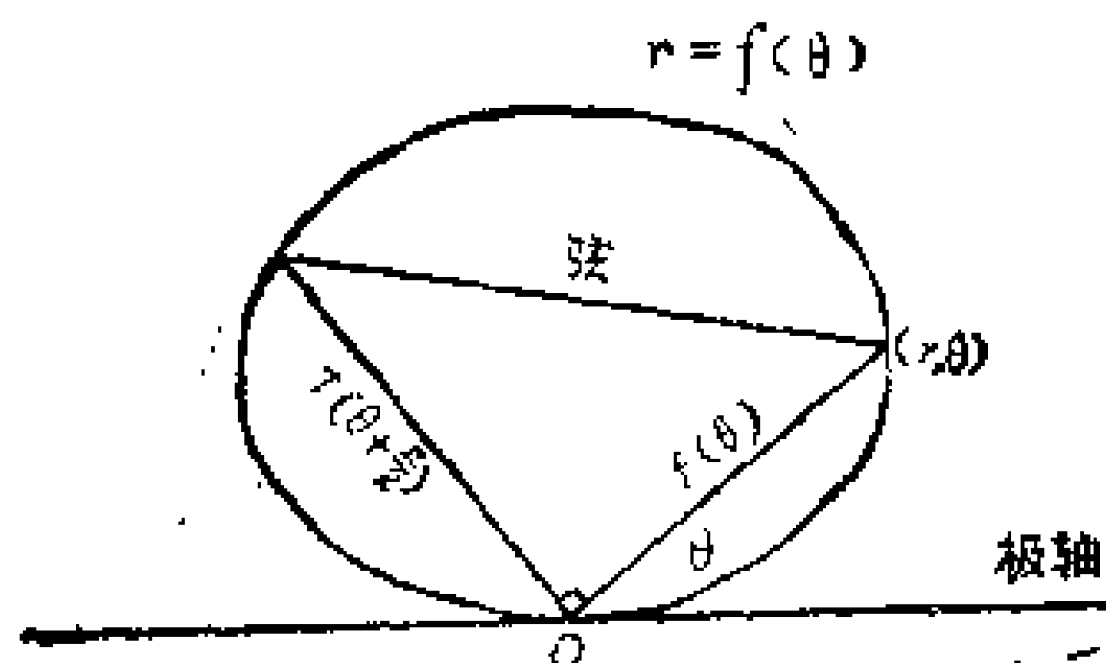


图 34

解答 使用极坐标，令区域在 origin 与 O 相切。设区域边界的方程为 $r = f(\theta)$ ，由通常的面积公式我们有

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\pi \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi f^2(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(\theta) d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi f^2(\theta) d\theta \end{aligned}$$

把第二个积分中的 θ 换成 $\theta + \frac{\pi}{2}$ ，它就变成

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} f^2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) d\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} f^2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) d\theta. \end{aligned}$$

因此面积就是

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left[f^2(\theta) + f^2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \right] d\theta.$$

此处的被积函数就是本题中区域的弦的平方。如果没有两点相距为2，那么所有的弦都小于2，其平方就小于4，于是

$$A < \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} 4 d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} d\theta = \pi.$$

这是矛盾，所以结论成立。

我们看到，若无弦长大于2，则面积不可就大于 π 。因此，如果已知面积大于 π ，我们就可以断定一定有弦比2长。

这个题目与组合几何学的现代论题的许多精采结论有关系。1911年赫尔曼·明柯夫斯基 (Hermann Minkowski) 的一篇遗著引起了关于平面上闭凸区域的一连串显著成果的出现，他提出了下面这个至今仍十分有名的定理：

如果面积大于4的中心对称闭凸区域的中心在一个格点上，那么它至少还包含另外两个格点。

(中心对称图形是包含一点 O ，绕 O 点旋转半转又会和自身重合的图形.)

因为在 *Mathematical Gems*, vol. 1, p. 47 (中译本《数学瑰宝》，第一辑，54 页) 已经讨论过这个定理了，这里就不打算再重新证明它。不过，下面这个定理是我们容易对付的，它属于悉尼大学的约瑟夫·汉默(Joseph Hammer) (*AMM*, 1968, p. 157, *Mathematical Notes*):

如果面积大于 π 的一个中心对称闭凸区域 R 的中心 O 在一个格点上，那就可以把它绕着中心旋转到一个新位置，使得它至少包含另外两个新格点。

证明 因为 O 是 R 的中心，故它平分 R 的通过它的一切弦。因此，如果有一条 ≥ 2 的弦 AB 通过 O ，那么，此弦在 O 的两侧至少可延伸 1 单位，并且

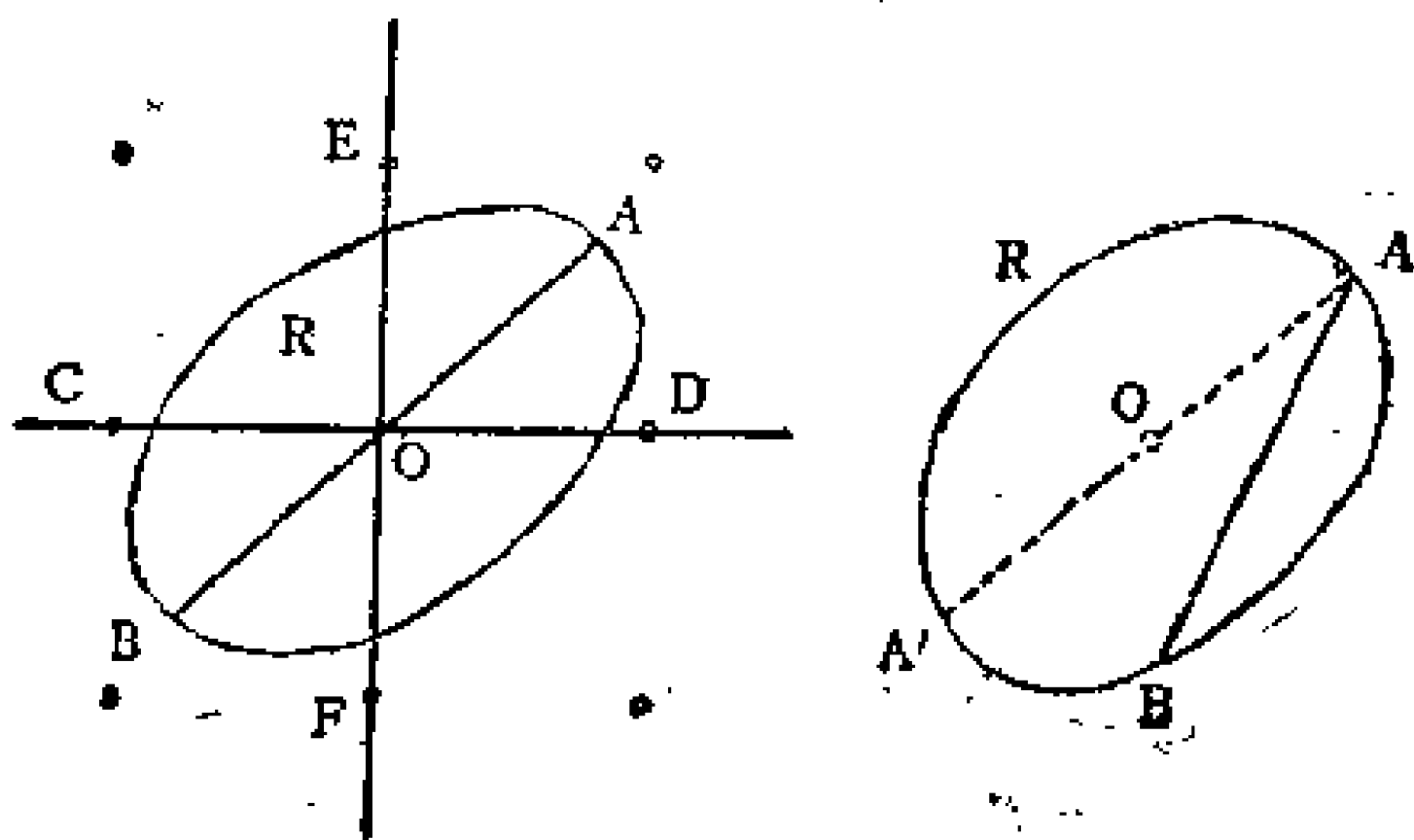


图 35

围绕 O 旋转后，此弦就会达到一个新位置，通过过 O 的一条格子线上的两个相邻的格点（ C 与 D 或 E 与 F ）（图35）

由于 R 的面积 $>\pi$ ， R 的某条弦 AB 必然大于2。如果 AB 通过 O ，那么结论成立；如果 AB 不通过 O ，那么 O 距一端或另一端，比如 A ，甚至比 $AB/2$ 还远。因为 R 是中心对称图形，这时弦 AOA' 比 AB 还要长。证毕。

用完全相同的思路可以建立汉默文章中的第二个定理：

如果面积大于 $\frac{\pi}{2}$ 的闭凸区域 R 绕着区域的任意一点 P 旋转，那么在某个位置上它至少含有一个格点。

证明 如果对 R 施以几何膨胀变换 $P(\sqrt{2})$ （即中心为 P ，膨胀系数为 $\sqrt{2}$ 的变换），则它的线性尺度增加 $\sqrt{2}$ 倍，面积增加2倍。因为新面积会超过 π ，所以新区域包含一条 >2 的弦，这就是说 R 中相应的弦 AB 的长度 $>2/\sqrt{2}=\sqrt{2}$ 。和前一定理的情况一样，要么 P 点是弦 AB 的中点，要么它距 A 、 B 中的一点距离比 $AB/2$ 还大。无论哪种情况， PA 或 PB 总有一个，比如 PA 要比 $\sqrt{2}/2$ 大。但是平面上每个点离某一格点充其量 $\sqrt{2}/2$ 那么远

(一个方格的中心 C 距四个格点顶点恰为 $\sqrt{2}/2$) (图36)。因此绕 P 点旋转就使射线 PA 通过离 P 最近的那个格点。

明柯夫斯基定理与汉默第一定理中的区域都要求中心对称。中心对称图形的对称中心和重心是重

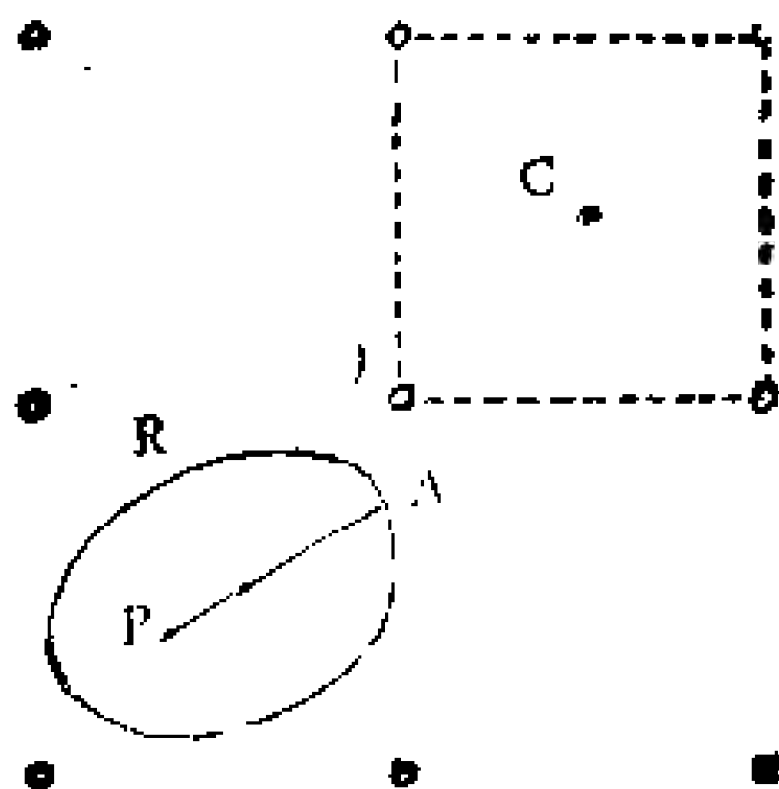


图 36

合的。可以完全等价地用重心位于格点的区域来陈述上面的定理。要是去掉中心对称这个条件，这些定理便不再成立。然而使我们感到惊异的是，把面积条件增加一个因子 $1/8$ ，定理又可以成立了：

重心在格点、面积 $> 4\frac{1}{2}$ 的闭凸区域至少另外还含有两个格点 (E. Ehrhart, [1])；

重心在格点，面积 $> 9\pi/8$ 的闭凸区域可以绕重心旋转至某一位置，使得它至少再含两个格点（此定理属于汉默，见上面提到的 AMM, 1968 中的文章）。

请读者欣赏一下短文〔2〕吧。

参考文献

1 E. Ehrhart, Une gé'néralisation
du théorème de Minkowski, Comptes
Rendus, 240 (1955), 483—485.

2 P.R.Scott, Lattice Points in Convex
Sets, Math.Mag. May 1976, 145--146.

三十、联立丢番图 方程

求下列方程组的正整数解：

$$a^3 - b^3 - c^3 = 3abc,$$

$$a^2 = 2(b + c).$$

解答 因为 $3ab$ 是正的，所以 a^3 必定比 b^3 ， c^3 还大，于是有

$$b < a, \quad c < a.$$

相加得 $b + c < 2a$ ，故 $2(b + c) < 4a$ 。从第二个方程便得

$$a^2 < 4a, \quad a < 4.$$

但第二个方程还告诉我们， a 是一个偶数，这样一来 a 就只能是2，而比它更小的 b 和 c 只能是1了。

三十一、反射切线

A, B 是直线 m 同侧的两个圆. 求作 A 的一条切线, 使其从 m 反射后也与 B 相切 (图 37)

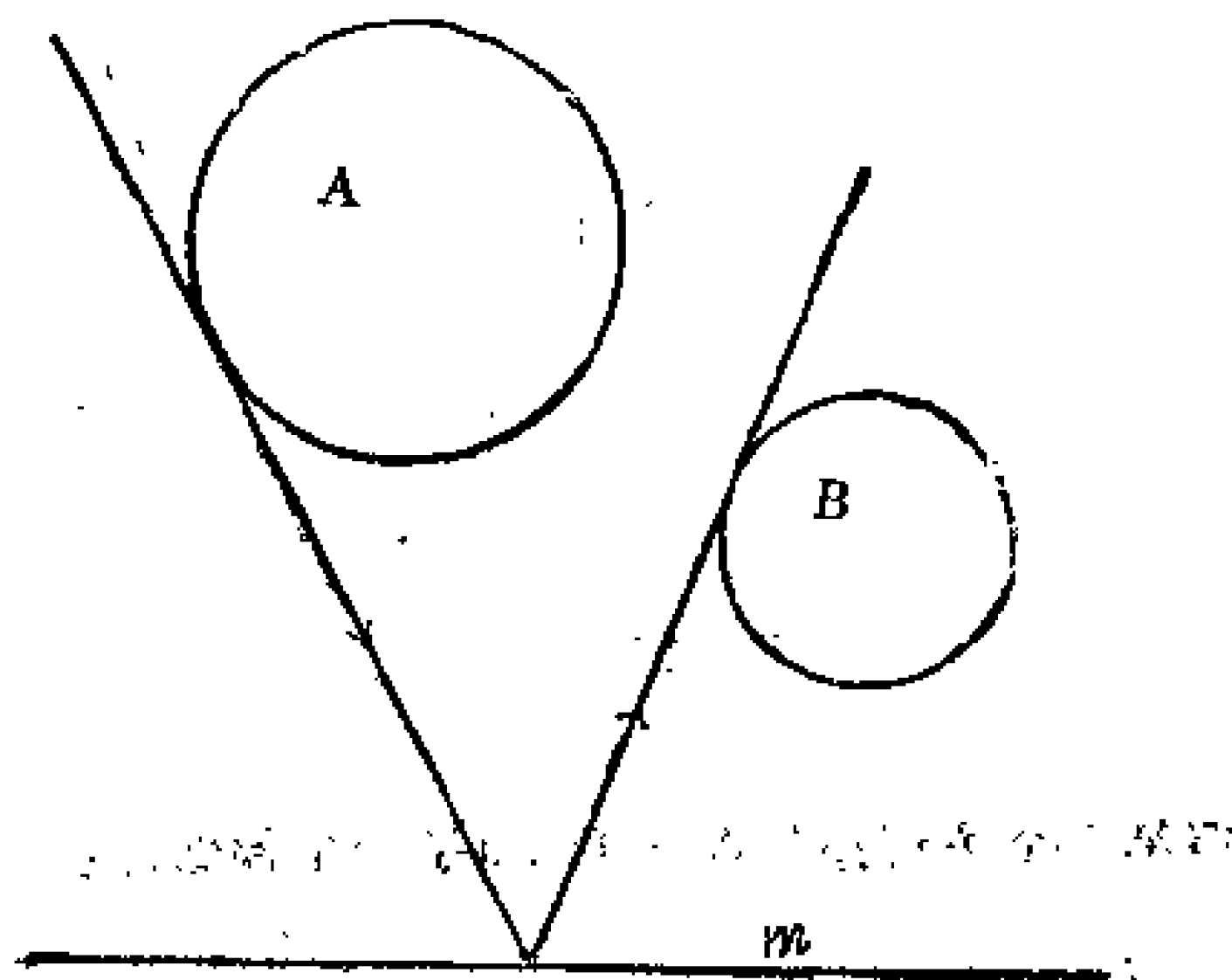


图 37

解答 如图 38, 把 B 映射到 m 的另一侧得到像 B' , A 和 B' 的公切线就会给我们提供四个可能的解答 (B' 的切线映射到 m 的另一侧便成了 B 的切线)。

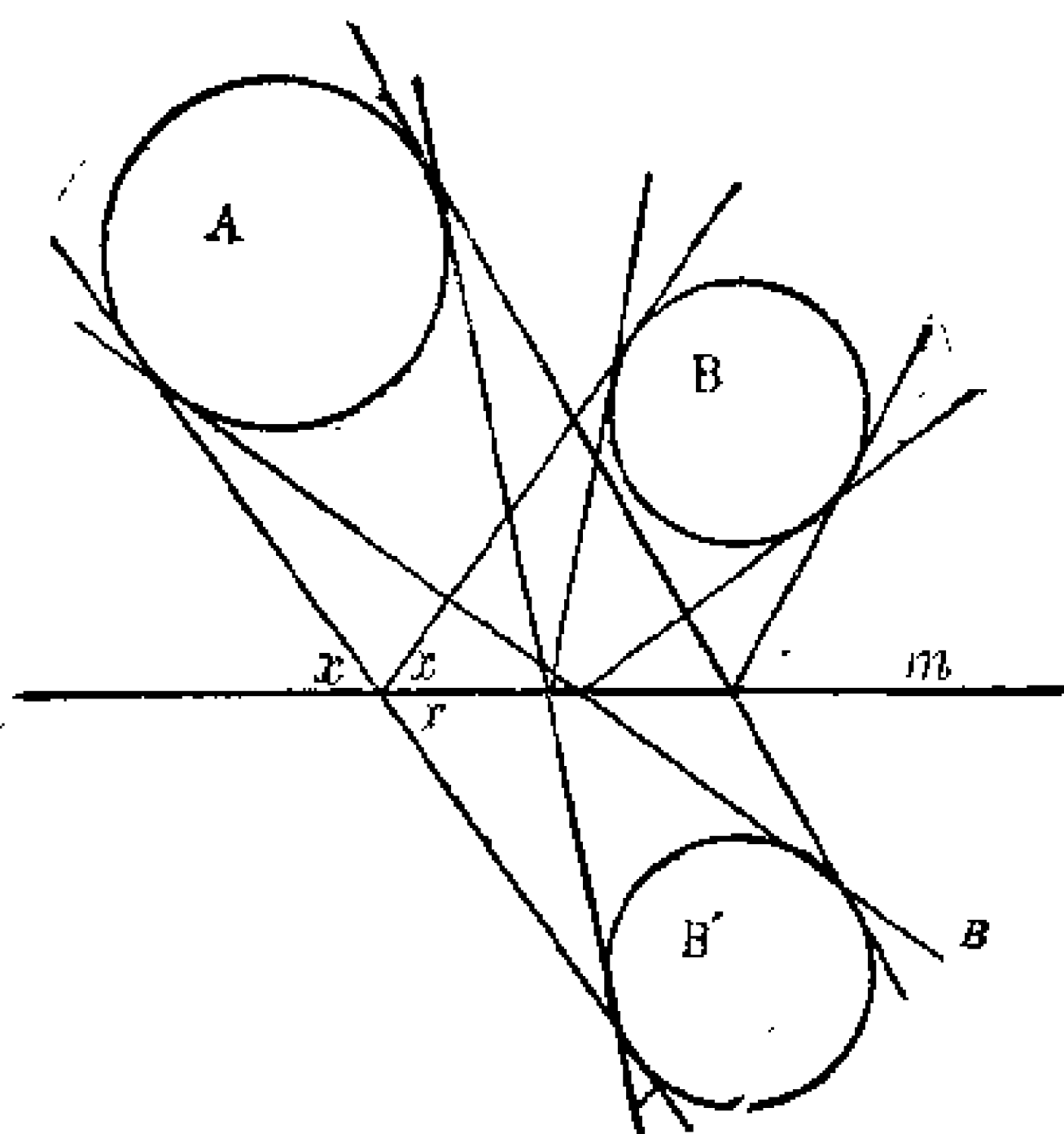


图 38

三十二、拆得干净利落的方格棋盘

如果从普通 8×8 格子棋盘上把全部黑方格拆除，棋盘上就连一个 2×1 的多米诺骨牌也放不下了。但是不管把哪个黑方格还原，棋盘上就放得下多米诺骨牌了。用这种拆法去掉黑方格后的棋盘算是拆得干净利落。

其实要拆毁棋盘不必非把全部黑格子（或全部白格子）拆走不可，只消把黑白方格作不同配合就行了。32张多米诺骨牌显然排满了整个棋盘（图39），只要这32对相邻方格的每一对格子不拆散，

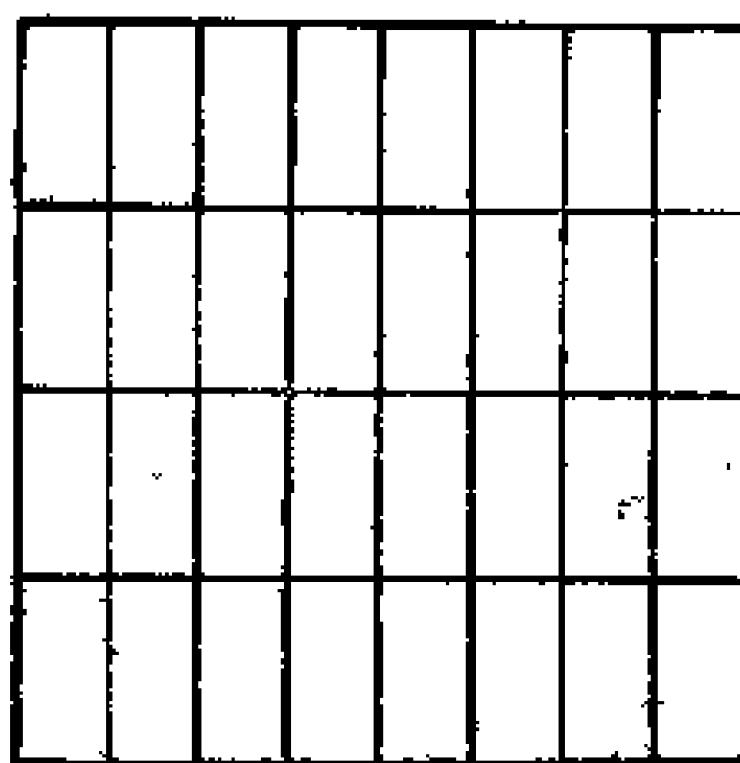


图 39

棋盘就能够放得下多米诺骨牌。因此要使棋盘无

用，至少必须去掉32个方格。

另一方面，可以看出，要把棋盘拆得干净利落可以去掉不止32个方格。不说有许多整块整块去掉的作法会把棋盘毁坏。关键在于把任何一个去掉的方格还原后，棋盘就可以放一个多米诺骨牌。要照顾到这个颇为苛刻的限制条件，能够取消的方格的最大数目大得惊人。试求出这最大个数。

解答 图40中的棋盘内有一些画上阴影线的方

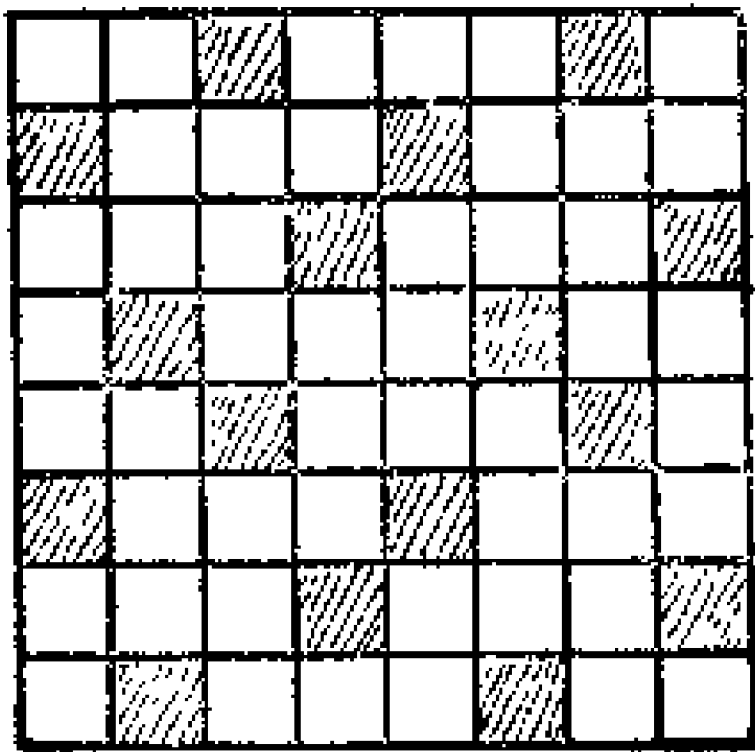


图 40

格。从图中可以看出，拆得干净利落的棋盘只能保留16个方格。我们要指出，少于 16 个方格就不行了，为此我们证明，只要一次去掉的方格数超过48，就至少会有这样一个方格（记为X），使得把它放还棋盘后，并不能恢复棋盘安放一个多米诺骨牌的能力。

要是在每个1/4块棋盘上保留多达4个的方格，那么总共至少可留下16个方格。在不足16个方格的棋盘上必定有某个1/4，比方说左上角的1/4保留的方格个数不超过3，因此，这四分之一棋盘上的某1/4块必定早已被拆走。这四分之一棋盘上的空着的四分之一可能有A，B，C，D四种位置，我们现在依次来考察一番(图41)。

(a)如果空着的四分之一是A，那么就把拐角处的方格X放还原，仍旧不能使棋盘容纳一块多米诺骨牌(图42)

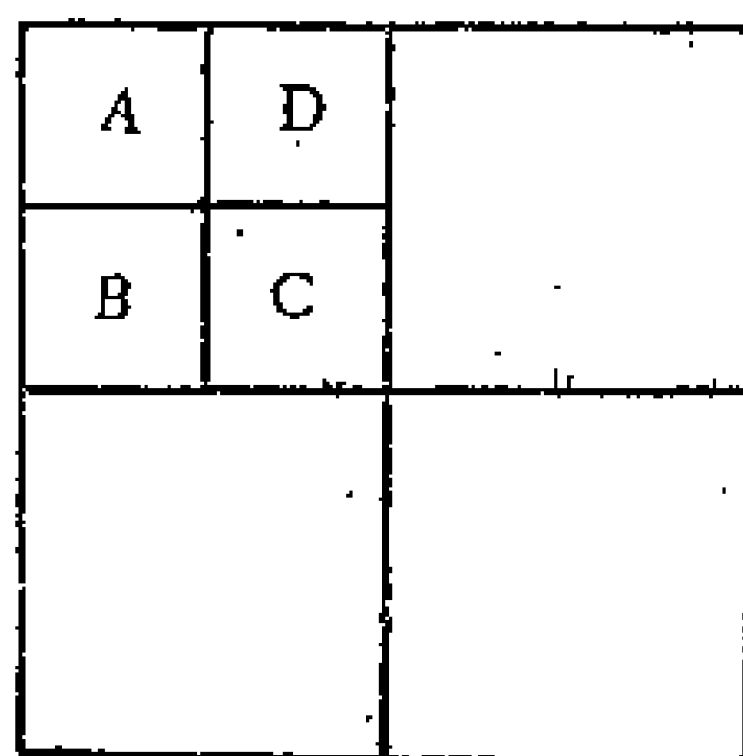


图 41

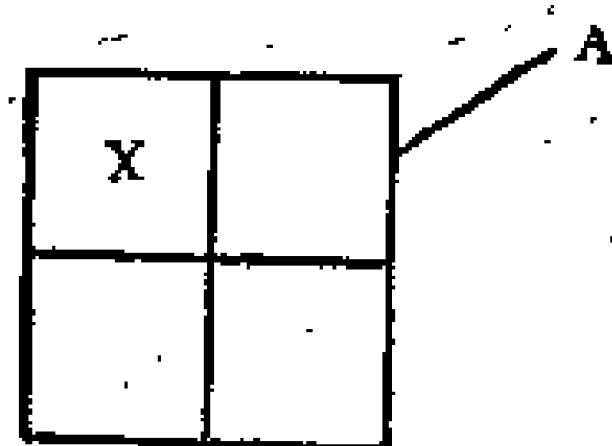


图 42

(b)假定B这一块中的E，F，G，H四个方格都划去了，并且B周围的方格已经照图43那样标上了记号。那么，除非保留方格P，否则即使把E放还原，棋盘也无法容纳一块多米诺骨牌，我们找寻不起作用的X的工作便宣告结束。因此假定P是保留下来了。这样，要拆毁棋盘，相邻的方格Q早

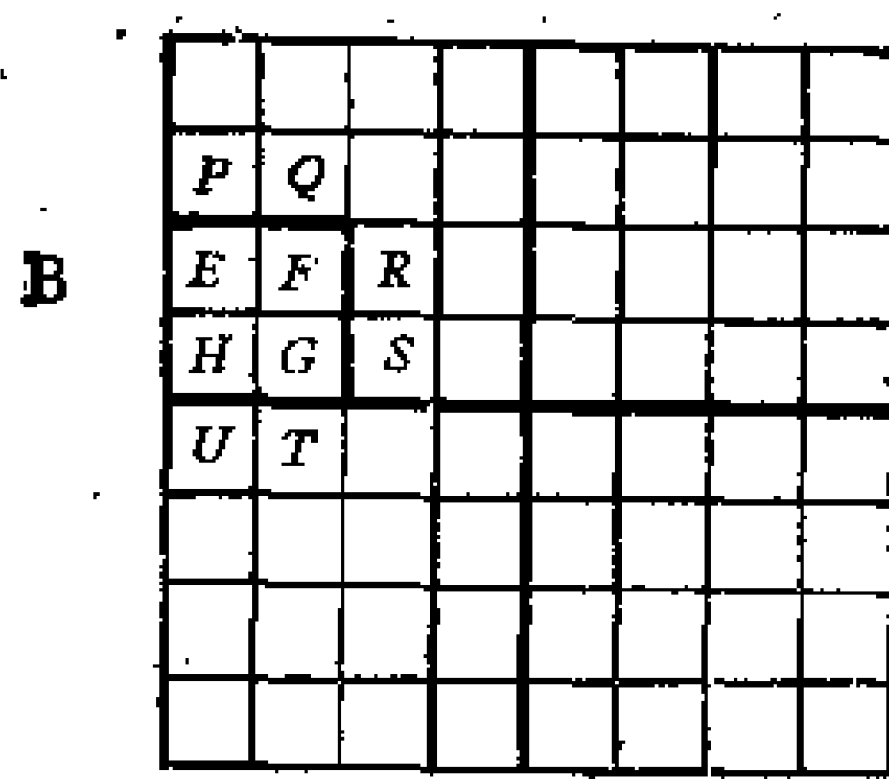


图 43

就必须抹掉。

F 周围是空方格 Q, E, G 。这等于说 要么保留 R ，要么 $X \equiv F$ ，找寻工作结束。假设保留 R ，那么相邻的 S 早该抹掉。考察一下 G ，我们找到无效的 $X \equiv G$ ，除非保留 T ，而这样就要求必须抹掉 U 。总之，要么我们找到了合适的 X ，要么得出消 U 的结论，而这又意味着与 H 相邻的三个方格都不在了，因此 $X \equiv H$ 。从而无论怎样都找得出 X 。

相同的另一个四分之一，即 D ，可以 完全一样地解决。

(c)剩下来该考察的只有在位置 C 的空白块了。把图43的标记增加，如图44所示。 C 部分含有 R, S, W, V 四个方格。

先来看一看 R 。因为 V, S 已抹掉，故 F, Y 中必须保留一个，不然就有 $X \equiv R$ 。由于 F 与 Y 对 C 的位置关系相同，两种情况是一样的。为确定起见，

O	I						
P	Q	Y	Z				
E	F	R	V	J			
H	G	S	W	K			
		N	M				

图 44

假设保留的是 Y 。于是我们可以像上面围绕 B 那样地围绕 C 进行研究，发现一个无效方格 X (V , W 或 S) 或者发现必须保留 Y , J , M , G , 抹掉 Z , K , N , F 。因此我们要么得到 X ，要么必须在棋盘左上方的四分之一保留方格 Y 与 G 。但是请大家回忆一下，在这四分之一棋盘上总共至多保留了三个方格。

如果有两个是 Y 与 G ，那么至多只能再有一个方格保留在棋盘的这四分之一块上。

如果外角 O 也留下来了，那就必须抹掉 P , E , H , F ，因此 $X \equiv E$ 。如果不保留 O ，可以完成推理如下：若保留 P ，则 $X \equiv I$ 。于是设 P 被抹掉，因为保留了 Y ，故必须抹去 Q 。要是 E 也被抹掉了，便得 $X \equiv P$ (因为 O 已不在)。如果 E 保留了下来，就有了三个留下的方格 Y , G , E ，因此 $X \equiv I$ 。

三十三、雪球

有个男孩堆了两个雪球，一个的直径比另一个的大一倍。他把雪球带进暖和的房间，让他们融化。由于雪球只有表面接触暖空气，所以假定融化速率与表面积成比例，当大雪球体积的一半化掉时，问小雪球还剩多少？

解答 我们先说明，当假设雪球以正比例于表面积的速率融化时，可以推出下述重要结果：不论雪球大小如何，半径变小的速率是个常数。作为一项推论，知道两个半径缩小相同的量。

球的体积与表面积分别是 $V = 4\pi r^3/3$ 与 $S = 4\pi r^2$ 。用 t 代表时间，融化速率为

$$\frac{dv}{dt} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}.$$

因与 $S = 4\pi r^2$ 成正比，故

$$4\pi r^2 \frac{dr}{dt} = k4(\pi r^2)$$

式中 k 为比例常数，由此得

$$\frac{dr}{dt} = k,$$

证明了前面的论断。

设融化前的半径为 $2r$ 与 r ，则大雪球的体积是

$$V = \frac{4}{3}\pi(2r)^3 = \frac{32}{3}\pi r^3.$$

融化了一半以后体积变成

$$\frac{16}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(\sqrt[3]{4}r)^3,$$

这表示半径成了 $\sqrt[3]{4}r$ 。因此两个雪球半径各缩短了 $(2 - \sqrt[3]{4})r$ 。于是，小雪球剩下的半径长为

$$r - (2 - \sqrt[3]{4})r = r(\sqrt[3]{4} - 1).$$

从而小雪球还剩下

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 (\sqrt[3]{4} - 1)^3,$$

这几乎是原体积的 $1/5$ ，因为 $(\sqrt[3]{4} - 1)^3 \approx 0.2027$ 。

三十四、从1

到10亿

把1到10亿全部写出来，所用的数码之和是多少？

解答 把0算上，我们共有5亿对数偶：

(0; 999999999), (1; 999999998),

(2; 999999997), ...,

(499999998; 500000001),

(499999999; 500000000),

其中，每一对数偶的数码之和是 $9 \cdot 9 = 81$ 。把略去未算的 (1; 000000000) 中的1算入和内，于是所求的和为

$$500000000 (81) + 1 = 40500000001.$$

三十五、邻接非交叠 单位正方形

把平面上的单位正方形 S 的位置固定好，试问：放近 S 与 S 接触但不交叠的非交叠单位正方形的个数，最多有多少？（图45）

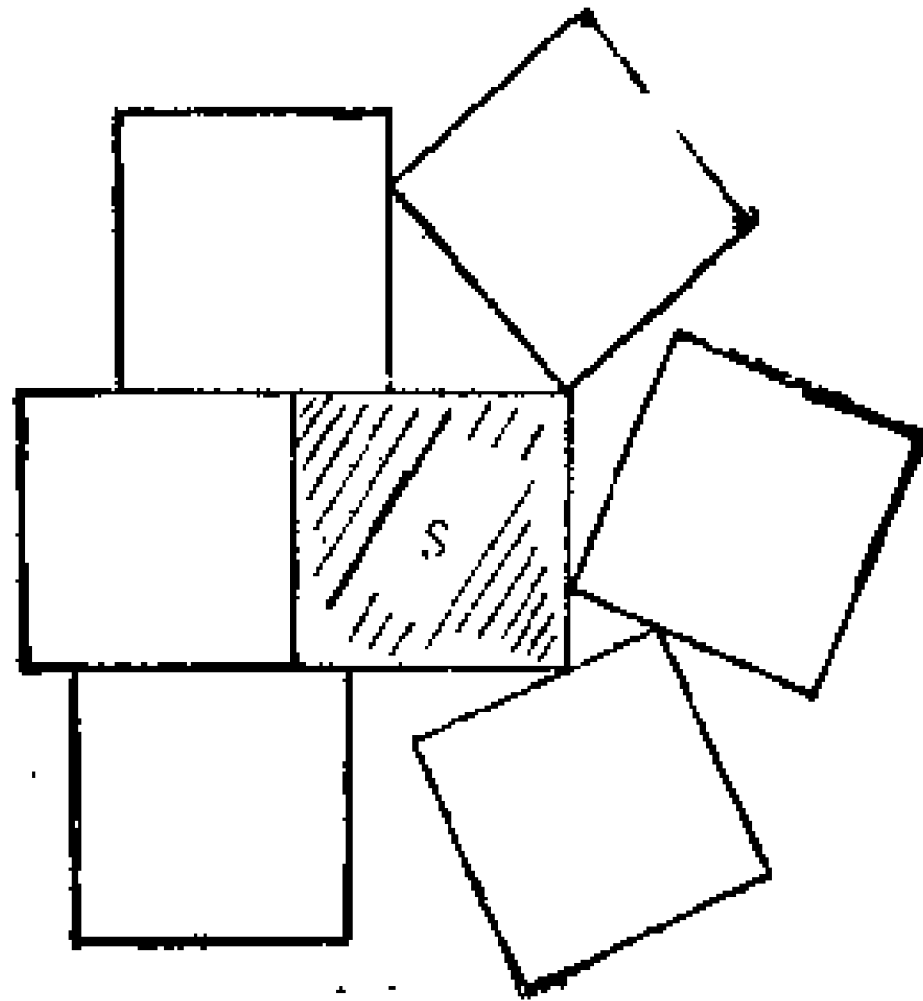


图 45

解答 3×3 方格棋盘上有 8 个相邻接的正方形，看来这肯定是把正方形排得最紧凑的排法（图 46），长时间都觉得是这么一回事，但总是证明不出来。有一天我浏览美国数学月刊 1939 卷时突然发现 J. W. T 扬（Young）的精采证明，使我惊喜欲狂。

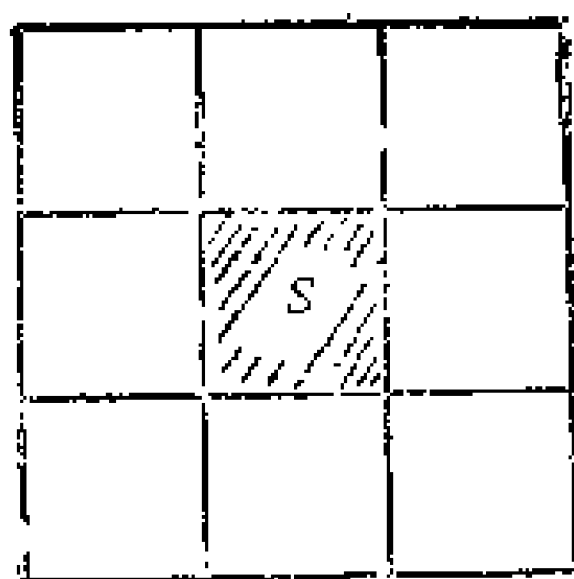


图 46

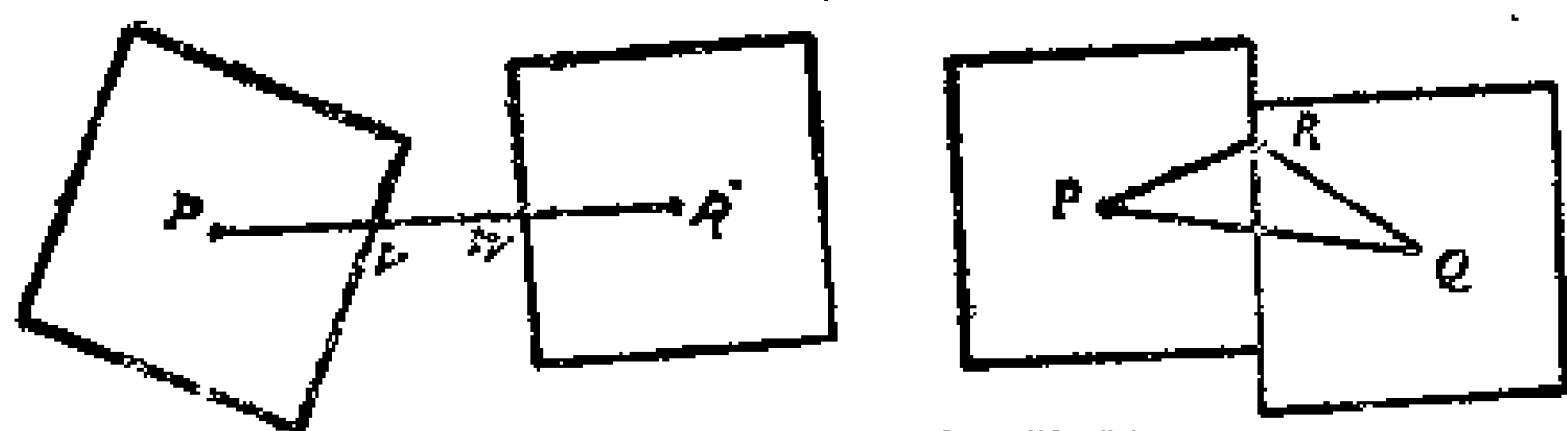
从图17中容易看出:

- (i) 两个非交叠单位正方形中心距离 ≥ 1 , 而
- (ii) 两个相邻接的单位正方形的中心距离不大于 $\sqrt{2}$.

(i)

(ii)

(至少有一个接触点 R)



$$PV \geq \frac{1}{2}, \quad WR \geq \frac{1}{2},$$

$$PQ \leq PR + RQ \leq \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\text{故 } PR \geq 1 \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 是对角线的一半长} \right)$$

图 47

设固定的正方形 S 的中心是 O ，用 A 、 B 表示与 S 邻接的某两个正方形的中心（图48），令 $OA=x$ ， $OB=y$ ， $AB=t$ 。

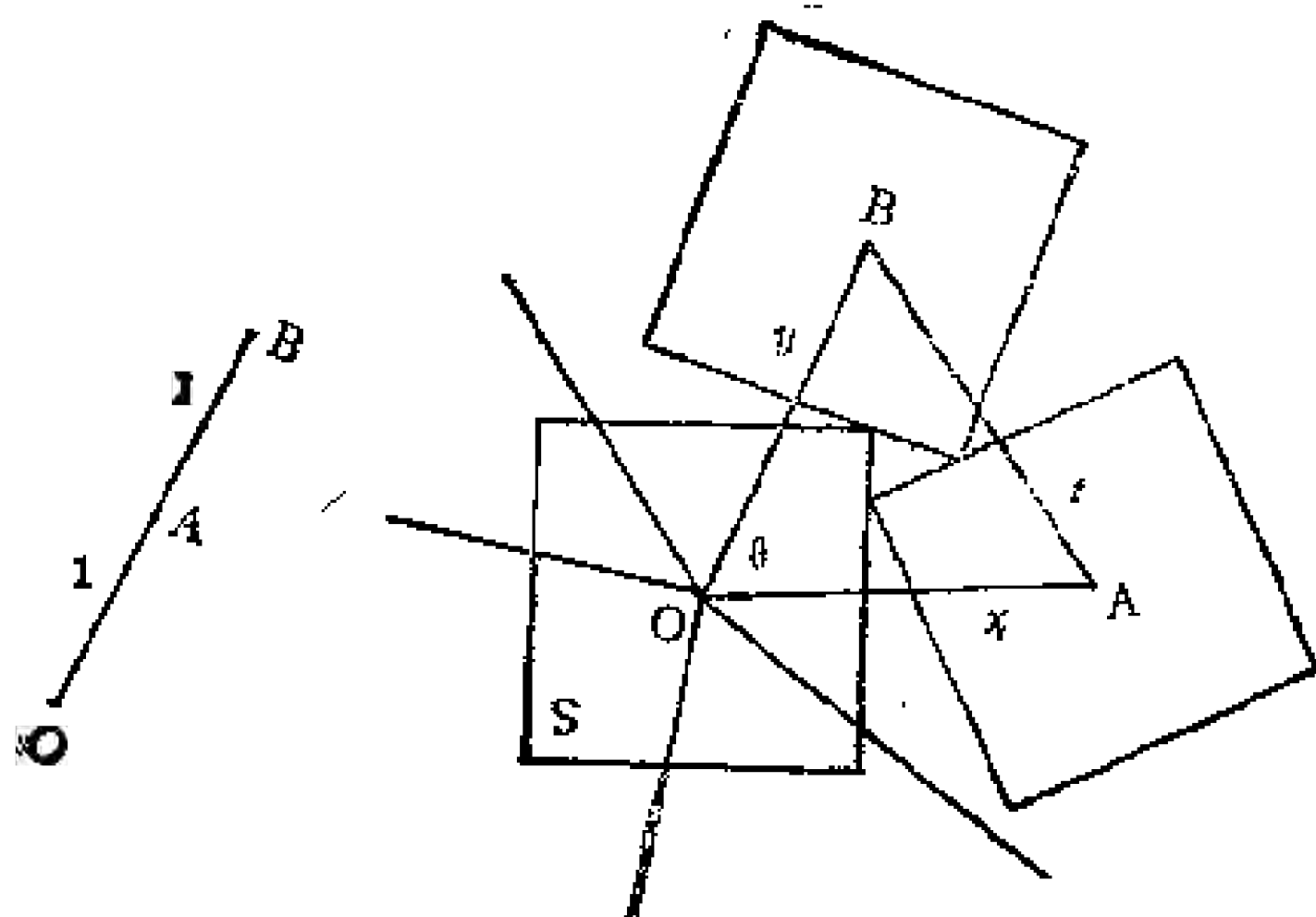


图 48

根据上面 (i)，(ii) 两条性质知道

$$x, y, t \geq 1, \quad x, y \leq \sqrt{2}.$$

中心为 A 、 B 的正方形之间可能会有空隙，因此 t 可能会 $>\sqrt{2}$ 。由于没有任何正方形相交叠，我们的确有 $t \geq 1$ 。

要是 O 、 AB （就设它们按此顺序）共线，那么 $OB=y$ 至少必须为2，这就超过了其上限 $\sqrt{2}$ 。因此， OA 、 OB 是从 O 发出的不同两条线（图48）。于是，把 O 与所有和 S 邻接的正方形的中心联接起来就形成一把扇，扇脉是过 O 的不同的线，每个正方形有一根。

现在假定 OA 和 OB 是扇图中的相邻两条(弧)线, 并用 θ 表示它们在 O 点处的夹角(图48). 在 $\triangle OAB$ 中利用余弦定律得

$$t^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta,$$

由此得

$$\cos \theta = \frac{x^2 + y^2 - t^2}{2xy}.$$

因为 $t \geq 1$, 所以

$$\cos \theta \leq \frac{x^2 + y^2 - 1}{2xy},$$

我们用 $f(x, y)$ 表示上式的右端. 前面已经提过, $1 \leq x, y \leq \sqrt{2}$, 因此 $f(x, y)$ 是正的. 我们接着要证明, 对于所考虑的 x 和 y , $f(x, y)$ 决不大于 $3/4$.

读者如果不熟悉偏导数, 可以读附录中的详细初等推导. 我们有

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{2xy(2x) - (x^2 + y^2 - 1)(2y)}{(2xy)^2} \\ &= \frac{x(2x) - (x^2 + y^2 - 1)}{2x^2y} = \frac{x^2 - y^2 + 1}{2x^2y}. \end{aligned}$$

同样还有

$$f_y = \frac{-x^2 + y^2 + 1}{2xy^2}.$$

当 $1 \leq x, y \leq \sqrt{2}$ 时, 显然 f_x 与 f_y 都是非负的. 因此当 x 与 y 增大时 f 的值不减小, 这意味着 $f(\sqrt{2},$

$\sqrt{2}$) 是所考虑的所有 $f(x, y)$ 中的最大值. 换句话说就是

$$f(x, y) \leq f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \frac{2+2-1}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{4}.$$

因此, OA 与 OB 的夹角 θ 满足

$$\cos \theta \leq \frac{3}{4}.$$

从查表知道 $\cos 40^\circ = 0.76604 \dots$. 因此

$$\cos \theta < \cos 40^\circ.$$

这说明 $\theta > 40^\circ$; 由此可知, 从 O 点射出到达相邻接的正方形中心的射线, 扫完 360° , 还用不完 9 个这种角 θ , $\theta > 40^\circ$. 因此, 相邻接的正方形最多 8 个.

叶什瓦大学的 D. J. 纽曼 (Newman) 和 W. E. 外斯卜隆 (Weissblum) 在美国数学月刊 (1962 年, 808 页) 上提过一个类似的但浅得多的问题:

平面上有六个闭圆, 任何一个都不包含其它面的圆心. 试证明这些圆不可能有公共点.

解答 假设有一个点 O 是这些圆的公共点. 把点 O 与六个圆心联接, 在 O 处形成一个扇形线束. 如果有两个中心 A, B 在过 O 的同一射线上, 那么由于这两个圆都包含 O , 显然其中一个圆包含另一个圆的圆心 (矛盾!). 因此, 在扇形线束中含有 6 条不同的线 (图 49).

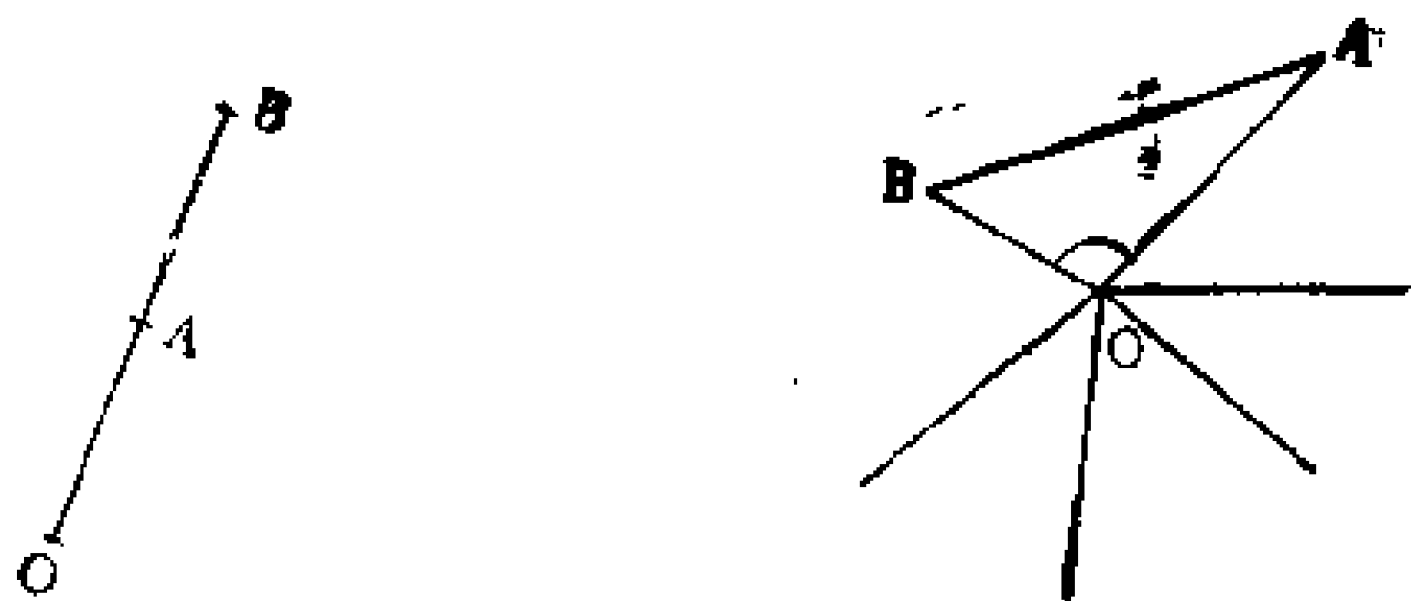


图49

令 A 与 B 表示这样的两个中心，它们使得 OA , OB 在扇形线束中相邻. 用 r 表示圆心为 A 、 B 的圆中较大的半径（若两圆相等，就表示共通值）. 由于任何圆不得包含其它圆的圆心，故 AB 必定大于 r . 但是以 A 、 B 为圆心的两个圆都包含 O ， OA 与 OB 都不可能大于 r . 于是在 $\triangle OAB$ 中， AB 肯定是最长边，并且 $\angle AOB$ 大于其余两个角，因而

$$\angle AOB > 60^\circ,$$

这就意味着 6 条线形成的扇包含了比 $6(60) = 360$ 度还大的角，而这是不可能的.

附录 函数 $z = f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1) / (2xy)$ 的图像是一张曲面 (图50). 我们感兴趣的只是 xy 平面上正方形 $1 \leq x, y \leq \sqrt{2}$ 正上方的 G 这一部分.

令 $K(a, b)$ 表示正方形内任意一点， $P(a, b,$

$x^2 - b^2 + 1 \geq 0$ ，因为分母是正数，所以曲线 C 在每点的切线率斜都是非负的。这就是说，在沿着曲线 C 往 x 增大的方向移动时， z 的值不会减小，因此 L 的端点 M 在 G 上对应了一点，这点离 xy 平面的距离与 L 正上方的 G 上任一点离 xy 平面的距离至少是同样远。

将直线 L 与平面 π 平行于 y 轴移动，类似地得到一条曲线 C' ，由下式表示

$$z = \frac{a^2 + y^2 - 1}{2ay}.$$

对 C' 上的点有

$$\frac{dz}{dy} = \frac{-a^2 + y^2 + 1}{2ay^2},$$

对所考虑的 y 与 a ，上式也是非负的。因此，保持 x 不变而让 y 增加，这样在 G 上移动时，距下面的 xy 平面至少是同样远（即 y 增加时， x 的值不减）。由此得出结论：从正方形内任意一点 $K(a, b)$ 出发，沿着 L 到 M ，然后沿正方形的边到 N ，那么，相应的 G 上的点 H 距 xy 平面最远（ x 值最大）。因此，坐标为 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 的点 $N(x, y)$ 就是本题中正方形内使 $f(x, y)$ 取最大值的 (x, y) 。这个最大值是

$$\frac{2+2-1}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{4}.$$

三十六、一个丢番图方程

令 a, b, c, d 为整数, $a \neq 0$. 证明: 只要 $bc - ad \neq 0$, 方程

$$axy + bx + cy + d = 0$$

只有有限多个整数解 (x, y) .

解答 原方程乘 a 得

$$a^2xy + abx + acy + ad = 0,$$

即

$$(ax + c)(ay + b) = bc - ad.$$

这表明 $(ax + c)$ 和 $(ay + b)$ 都是 $bc - ad$ 的因子. 因为 $bc - ad \neq 0$, 它只有有限多个因子, 故 $ax + c$ 与 $ay + b$ 只能有有限个可能值, x 与 y 也如此.

我们知道, $axy + bx + cy + d = 0$ 的图是一条双曲线. 如果 $bc - ad = 0$, 则方程化为

$$(ax + c)(ay + b) = 0,$$

双曲线退化为一对平行于坐标轴的直线. 显然, 方程的整数解对应于图上的格点. 因此即使 $bc - ad$

$=0$ ，方程也只有有限多个整数解，除非另外 a 还整除 c 或 b ，这时退化曲线的一条直线与（平行于坐标轴的）格子线重合。

下面介绍的简捷解法是我的同事勒罗依·狄开（Leroy Dickey）指出的， $axy+bx+cy+d=0$ 所表示的双曲线正好有平行于坐标轴的两条渐近线，可以看出事实的确如此，因为平移变换

$$x=X-\frac{c}{a}, y=Y-\frac{b}{a}$$

把方程变成

$$a\left(X-\frac{c}{a}\right)\left(Y-\frac{b}{a}\right)+b\left(X-\frac{c}{a}\right)+c\left(Y-\frac{b}{a}\right)+d$$

$aXY+k=0$ ， k 是常数，

从而得到 $XY=\text{常数}$ ，这是双曲线的标准方程，其渐近线是坐标轴。因此，随着双曲线向其渐近线靠拢，会出现这样一个时刻，其时双曲线最后一次与一条格点线相交，此后，就一直处在一对相邻的格点线形成的通道里。即使渐近线与一条格点线重合，情况也如此，因为双曲线与其渐近线不相交。

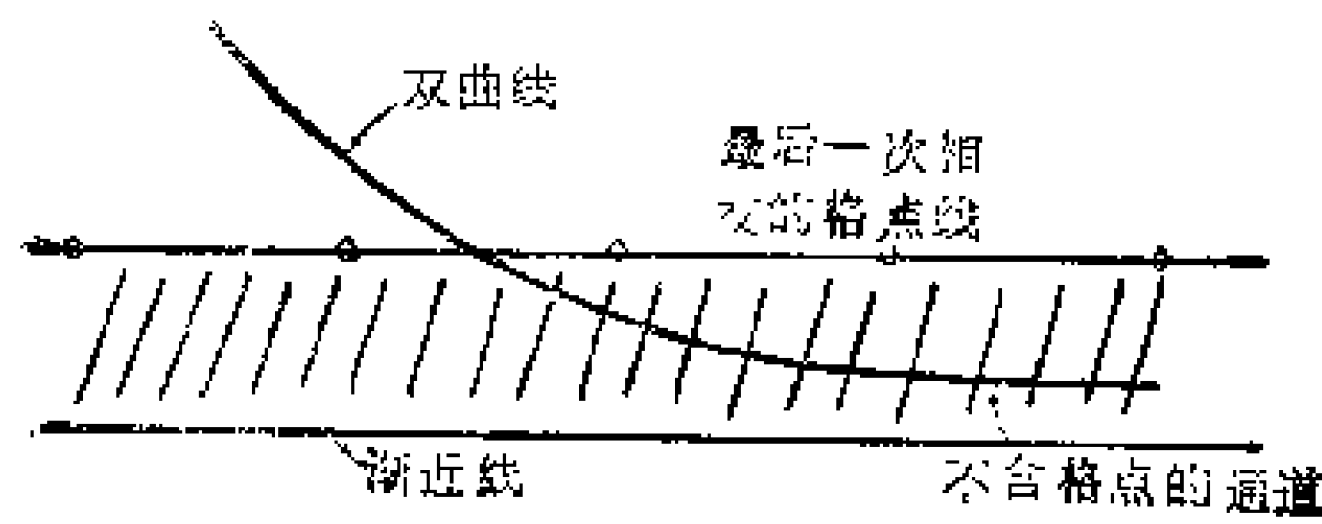


图 81

一旦进入这种通道里，曲线的无限长的尾巴再也碰不到格点了（图51），因此被双曲线碰着的格点都在平面的有限部分内，从而个数也有限。

三十七、斐波那契 数列

自然数的数列

$\{f_n\} : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,$
 $21, 34, 55, \dots,$

其中 $f_1 = f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ (当 $n > 2$ 时),
叫斐波那契 (Fibonacci) 数列, 这是数学中尽人
皆知的数列之一. 真的, 它的特点、它的推广多极
了, 所以有一本叫《斐波那契季刊》的杂志, 专门
刊登研究斐波那契数列的文章和有关内容.

我们现在的问题只是想知道, 不超过已知自然
数 N 的斐波那契数列的项有多少?

解答 一百多年前就已经知道斐波那契数列的
第 n 项是

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

(这个公式的简捷证明, 请参看 Ross Honsberger: Mathematical Gems, vol. 1, Dolciani Mathematical Expositions, Mathem-

atical Association of America, pp.171—172.①) $\sqrt{5}$ 约等于 2.2,

故

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.6.$$

因此 $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ 随 n 为偶为奇而分别为正为负, 当 $n=1, 2, \dots$ 时,

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \text{ 之值} < \frac{1}{2}, \text{ 由于}$$

$$\left| -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right| < \frac{1}{2},$$

又 f_n 为整数, 由表示 f_n 的公式知道, f_n 必定是最接近

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

的那个自然数. 因此决不会有

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = N + \frac{1}{2}.$$

所以对斐波那契数 $f_n \leq N$, 必然有

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n < N + \frac{1}{2}$$

①有中译本, 江嘉禾, 《数学瑰宝》, 第一辑 四川教育出版社——译者

(以免最近的整数 f_0 超过 N)。反之, 容易看出, 如果

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n < N + \frac{1}{2},$$

则最近的整数必然 $\leq N$ 。因此, $f_0 \leq N$ 的充要条件是

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n < N + \frac{1}{2},$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n < \left(N + \frac{1}{2}\right)\sqrt{5},$$

$$n \cdot \log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$< \log\left\{\left(N + \frac{1}{2}\right)\sqrt{5}\right\},$$

$$n < \frac{\log\left\{\left(N + \frac{1}{2}\right)\sqrt{5}\right\}}{\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}.$$

很容易看出, 上式右端的对数比值决不是整数, 否则, 如果

$$\frac{\log\left\{\left(N + \frac{1}{2}\right)\sqrt{5}\right\}}{\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} = k \text{ (整数)},$$

则

$$\log\left\{\left(N + \frac{1}{2}\right)\sqrt{5}\right\} = k \cdot \log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$= \log \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k,$$

从而

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k = N + \frac{1}{2},$$

与前面的结果矛盾。

因为 n 是整数，所以与 n 的最大许可值对应的 $\leq N$ 的最大斐波那契数是

$$n = \left\lfloor \frac{\log \left\{ \left(N + \frac{1}{2} \right) \sqrt{5} \right\}}{\log \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)} \right\rfloor$$

的那一项，这里 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。

由于斐波那契数列的最初两项是一样的，所以不同的斐波那契数的个数比 n 少 1。

现在来考虑这样的问题：算出在 1, 2, 3, ..., n 中不得选相邻二数的选法个数（空集——不选也算一个选法）。

用 a_{n-1} 表示 1, 2, 3, ..., $n-1$ 个数中的选法个数。考虑 1, 2, 3, ..., n 的 a_n 个选法。每一个这种选法或者含 n ，或者不含 n 。若不含 n ，那就是 1, 2, 3, ..., $n-1$ 的 a_{n-1} 个选法之一；若含 n 就必须避开 $n-1$ （因为 $n-1$ 与 n 相邻），这意味着这个选法的剩余部分是 1, 2, 3, ..., $n-2$ 的 a_{n-2} 个选法之一。当然有可能这个选法只含有 n ，这相当于在 1, 2, 3, ..., $n-1$

2 中不选（所以要把空集计算在内）。于是总计有

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},$$

因为很容易算出 $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是 2, 3, 5, 8, …, $a_n = f_{n+2}$ (斐波那契数列的第 $n+2$ 项)。

三十八、厄尔迪什 不等式

设 ON 是以 O 为圆心的圆内的一条半径，它垂直于弦 AB ，并与 AB 交于 M 。 P 为优弧 \widehat{AB} 上不与 N 正对的任意一个点， PM 与 PN 分别确定出圆上的点 Q 与弦 AB 上的点 R （图 52）。试证明 RN 恒大于 MQ （令人惊异的是，快速猜测时许多人把 MQ 当成长的了）。

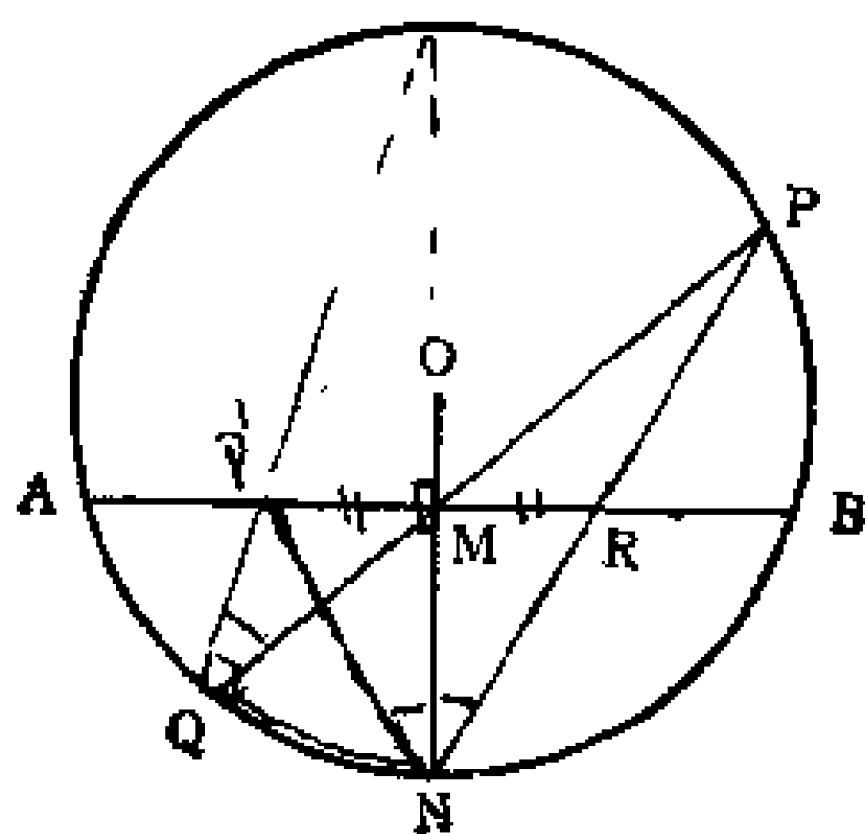


图 52

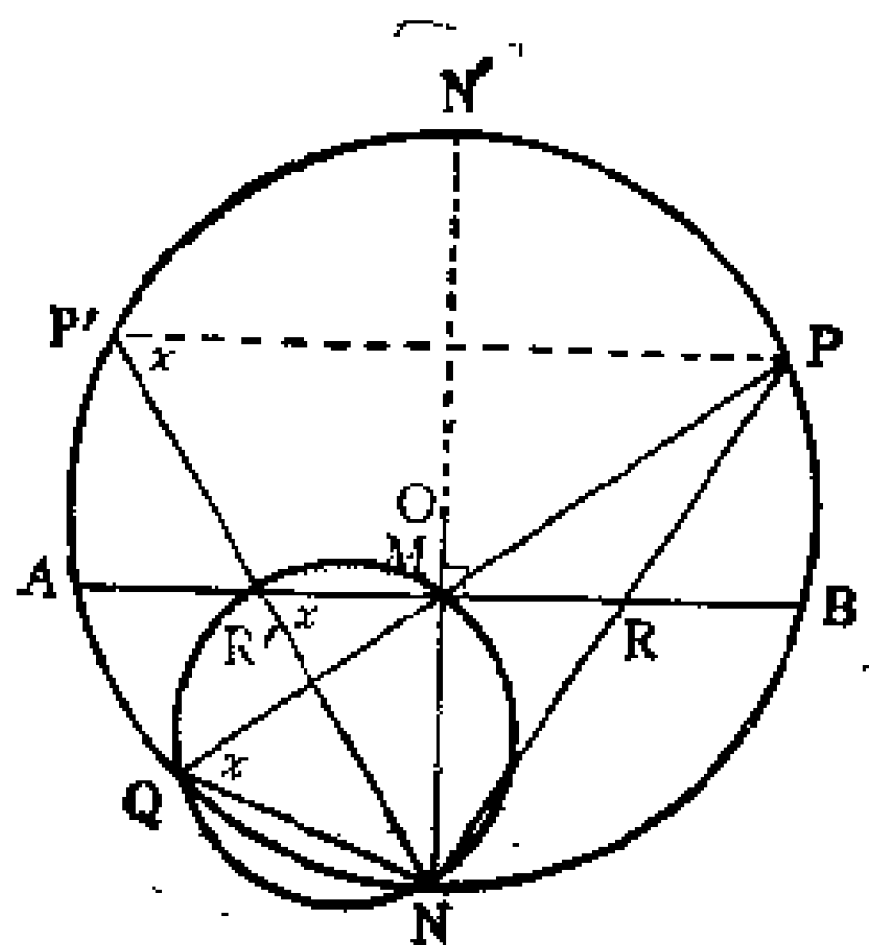


图 53

解答一（保尔·厄尔迪什） 令 PN 关于直径 ON 的反射对称为 $P'N$ （图 53）。因为 AB 垂直于

ON ，所以这个反射把 R 变成了 $P'N$ 与 AB 的交点 R' ，因此 $RN=R'N$ 。

因 PP' 与 AB 都垂直于直径 NON' ，所以它们互相平行，从而得到两个相应的等角 $NR'M$ 与 $NP'P$ ，又因同弧所对圆周角相等，即 $\angle NP'P=\angle NQP$ ，故 $\angle NR'M=\angle NQM$ ，这表明四点 Q, N, M, R' 共圆。

弦 $R'N$ 在这个圆的圆周上（ M 点处）对着一个直角，因此它是直径。然而，可以看出，弦 QM 所对的圆周角即 $\angle MNQ$ 不是直角（因 NN' 是已知圆的直径，故 $\angle NQN'$ 是直角，这表明在 $\triangle QNN'$ 中 $\angle QNN'$ 不是直角）。因此弦 QM 小于直径 $R'N \Rightarrow RN$ 。

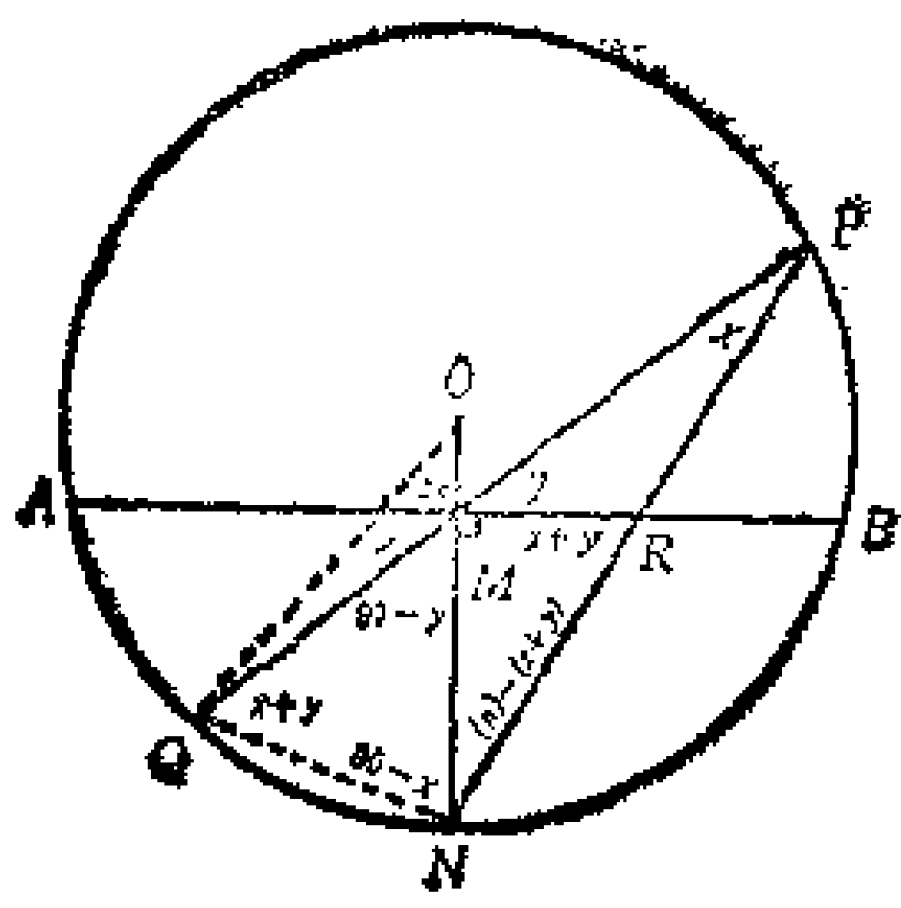


图 54

解答二〔安大略省斯卡勃罗的彼得·克里彭 (Peter Crippen)〕

令 x 、 y 分别表示 $\angle P$ 和 $\angle PMR$ (图54)，那末圆心角 QON 为 $2x$ ，等腰三角形 OQN 的每个底角为 $90^\circ - x$ ，图中其余的角容易算出，如图所示。

把正弦定律用于 $\triangle MQN$ 得

$$\frac{QM}{\sin(90^\circ - x)} = \frac{MN}{\sin(x + y)},$$

用于 $\triangle MNR$ 则有

$$\frac{MN}{\sin(x + y)} = \frac{RN}{\sin 90^\circ}.$$

因此

$$\frac{QM}{\sin(90^\circ - x)} = \frac{RN}{1}.$$

由于 $\sin(90^\circ - x) < 1$ ，故得 $QM < RN$ 。

纽约市很有前途的高中学生马克·克莱曼在 Math. Mag.^①，49 (1976)，217—218 页上发表了一个很精辟的解答。

①数学杂志——译者注。

三十九、分格点

联结 $A(p, 0)$ 与 $B(0, p)$ 的线段通过 $p-1$ 个格点 $(1, p-1), (2, p-2), \dots, (p-1, 1)$. 从这些点到原点 O 的 $p-1$ 条直线把 $\triangle OAB$ 分成 p 个小三角形. 靠外边的两个小三角形由于都有一条边是坐标轴, 显然它们的内部不包含平面上的格点. 如果 p 是素数, 那么, 从原点画出的这些分割线段没有一条包含格点 (图 55). 试证明: 当 p 为素数时, $\triangle OAB$ 内的全部格点都在

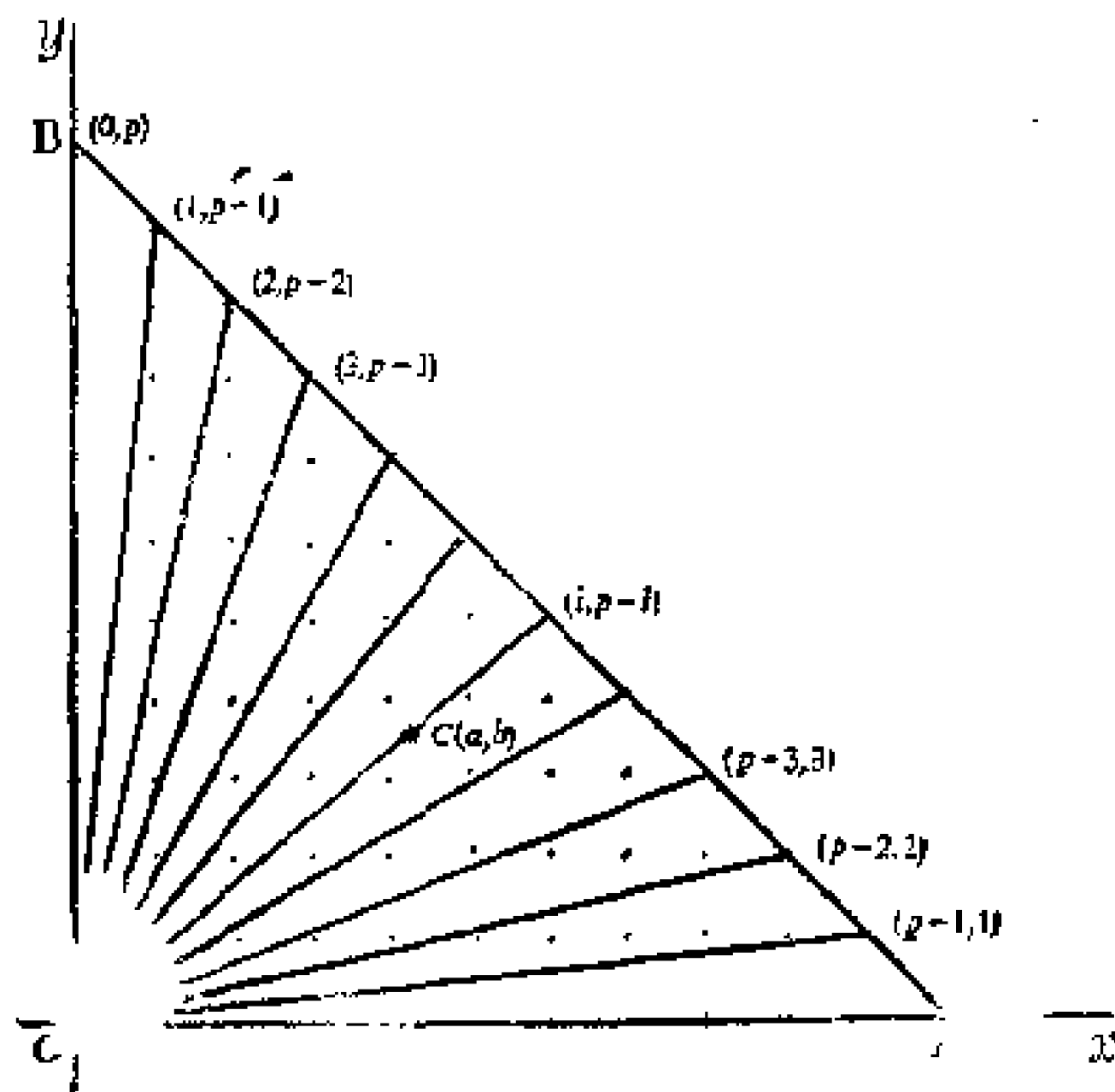


图 55

$p-2$ 个内侧小三角形的内部，并且每个内部小三角形所含格点一样多。

解答 令 $C(a, b)$ 表示 $\triangle OAB$ 内的一个格点，直线 OC 的斜率就是 b/a ，如果 C 在一条分割线上，比如在联结点 O 与 $(i, p-i)$ ($1 \leq i \leq p-1$) 的直线上，那末 OC 的斜率又会是 $(p-i)/i$ 。因此 $b/a = (p-i)/i$ 。由于 $i < p$ 且 p 为素数，故 i 与 $p-i$ 互素。然而 C 比 $(i, p-i)$ 更靠近 O ，所以 a 与 b 分别小于 i 与 $p-i$ 。于是等式 $b/a = (p-i)/i$ 表示： $(p-i)/i$ 没有化成最简，可以约成 b/a 。这就与 $i, p-i$ 互素相抵触了，因此结论应是 $\triangle OAB$ 内的全部格点都落在 $p-2$ 个内侧小三角形内部。

注意， AB 被格点 $(i, p-i)$ 所等分，因此所有小三角形面积相等。因为每个顶点都是格点，我们可以用下面的匹克 (Pick) 定理来算面积。

匹克定理 顶点为格点 (且自身不相交) 的多边形的面积是

$$q + \frac{p}{2} - 1,$$

式中 q 是多边形内的格点数， p 是边界上的格点数 (包括顶点和各边上的格点)。(匹克定理的优美证明，见参考文献。)

因为 $(i, p-i)$ 与 $(i+1, p-i-1)$ 之间没有格

点, 我们发现每个内侧小三角形的面积是

$$q + \frac{3}{2} - 1.$$

由于对所有内侧小三角形这式子都一样, 所以 q 对它们也必定一样, 这表明它们平分了 $\triangle OAB$ 内部的格点.

q 的值很容易计算. 每个小三角形的面积是 $(1/p)(\triangle OAB)$, 即

$$\frac{1}{p} \left(\frac{1}{2} \cdot p \cdot p \right) = \frac{p}{2}.$$

因此

$$q + \frac{3}{2} - 1 = \frac{p}{2},$$

由此得

$$q = \frac{p-1}{2}.$$

参 考 文 献

Ross Honsberger, *Ingenuity in Mathematics*, vol. 23, New Mathematical Library, Math. Assoc. of America, 27—31.

四十、完全数

古代希腊人发现，某些自然数 n 有很特别的性质： n 的真因子之和正好等于 n 自身。例如， $n=28$ 就有

$$1+2+4+7+14=28.$$

这样的数他们称为“完全数”。 n 的全部正因子（包括 n 自己）的和表示成 $\sigma(n)$ ，如用这个算术函数 $\sigma(n)$ 来表达的话，那末，若 $\sigma(n)=2n$ ，则 n 是完全数。看来完全数是极其稀有的。头五个完全数是 6、28、496、8128、33550336，到1976年总共才知道24个完全数，最大的一个是 $2^{19938}(2^{19937}-1)$ ，含6000多位数。

十八世纪时欧拉 (Euler) 证明了，每个偶完全数 m 可以表示成

$$m=2^{n-1}(2^n-1), \text{ 式中 } 2^n-1 \text{ 是素数.}$$

(关于 L. E. 狄克逊 (Dickson) 对这一结果的辉煌证明 (1911)，请看我的书《Ingenuity in Mathematics》(数学技巧)，113页起，该书由美国数学协会出版，收入新数学文库第23卷。(后面要用的) 下列两个简单结论也取自该书：

(i) 若 a 与 b 互素, 则 $\sigma(n)$ 有乘法性: $\sigma(ab) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$.

(ii) 若 $2^n - 1$ 是素数, 则指数 n 也是素数(124页).

有了这番准备功夫, 即可知道, 本题就是要求我们找出所有的完全数 n , 对于这种 n , 要求 $\sigma[\sigma(n)]$ 也是完全数.

解答 首先设 n 是奇完全数, 则 $\sigma(n) = 2n$, 因 2 与 n 互素, 有

$$\begin{aligned}\sigma[\sigma(n)] &= \sigma(2n) = \sigma(2) \cdot \sigma(n) = 3 \cdot \sigma(n) \\ &= 3(2n) = 6n.\end{aligned}$$

显然 $6n$ 是偶数, 若它也是完全数, 则对某个素数 p 我们必定有

$$6n = 2^{p-1}(2^p - 1)$$

(p 必为素数, 因为 $2^p - 1$ 是素数). 然而因为 n 是奇数, 故 $6n$ 只含一个单因子 2 (在 6 中). 这意味着

$$2^{p-1} = 2^1, \text{ 从而 } p = 2.$$

因此

$$6n = 2(2^2 - 1), \text{ 故 } n = 1.$$

但是 1 不是奇完全数, 这是矛盾. 因而不存在奇完全数 n 使得 $\sigma[\sigma(n)]$ 也是完全数.

其次假设 n 为偶完全数. 既为偶完全数, 那末

对于某个素数 p , n 可以表为

$$n = 2^{p-1}(2^p - 1), \text{ 式中 } 2^p - 1 \text{ 为素数.}$$

此时2与 $2^p - 1$ 互素, 我们有

$$\begin{aligned}\sigma[\sigma(n)] &= \sigma(2n) = \sigma[2^p(2^p - 1)] \\ &= \sigma(2^p) \cdot \sigma(2^p - 1) \\ &= (2^{p+1} - 1)[(2^p - 1) + 1] \\ &\quad (\text{因 } 2^p - 1 \text{ 是素数}) \\ &= 2^p(2^{p+1} - 1).\end{aligned}$$

这显然是偶数, 倘若还是完全数, 它就已经表成完全数的欧拉形式了, 于是推知指数 $p+1$ 必为素数. 因为 p 与 $p+1$ 都必须是素数, 而且它们相邻, 所以只能是2和3. 因此

$$\begin{aligned}n &= 2^{p-1}(2^p - 1) = 2(2^2 - 1) = 6 \\ \sigma[\sigma(n)] &= \sigma[\sigma(6)] = \sigma(12) = 28.\end{aligned}$$

因而 $n=6$ 是唯一解.

四十一、四边形的边

试证明：若一个四边形各边边长都是整数（对某个长度单位而言），并且任何一边的边长整除其余三边长度之和，则这四边形有两边是相等的。

解答 假设任何两条边都不相等。用 $S_1 > S_2 > S_3 > S_4$ 表示各边的长度，以 p 表示周长。我们已知 $S_i | p - S_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ 。此时还有 $S_i | p$ ，但是 S_i 除 p 商多少呢？

考虑最长边的长度 S_1 的情形。四边中任意三边之和大于第四边（从第四边的一端沿四边形走到另一端，另三边是“远路”）。因此 S_1 小于周长之半： $S_1 < p/2$ 。然而 S_1 是最长边的长度，必然大于周长的四分之一（否则四边加起来也不足 p ）。所以

$$\frac{p}{4} < S_1 < \frac{p}{2}.$$

这表明 S_1 除 p 之商大于 2，小于 4，因而它除 p 应商

$$3, \text{ 即 } S_1 = \frac{p}{3}.$$

因为 $S_2 < S_1$ ，故 S_2 除 p 的商必定比 S_1 除 p 的商要

大，这意味着 $p/S_2 \geq 4$ ，即 $S_2 \leq p/4$ 。又由于 $S_3 < S_2$ ，所以 $p/S_3 \geq 5$ ，即 $S_3 \leq p/5$ 。类似有 $S_4 \leq p/6$ 。因此，

$$\begin{aligned} p &= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \\ &\leq \frac{p}{3} + \frac{p}{4} + \frac{p}{5} + \frac{p}{6} = \frac{57}{60}p < p, \end{aligned}$$

这是个矛盾，故四边形必定有某两边是相等的。

四十二、算术级数 中的素数

试证明：在公差小于2000的自然数算术级数中不可能多达十二个相邻项都是素数。

解答 设算术级数的 n 个相邻项

$$a, a+d, a+2d, \dots, a+(n-1)d$$

都是素数， $n \geq 3$ 。若 $a < n$ ，则上面各项中必有一项为

$a+ad=a(1+d)$ ，这不是素数，因为 a 与 $1+d$ 都比1大。因此我们必有 $a \geq n \geq 3$ 。

令 p 是小于 n 的素数，并设 p 不能整除 d 。我们来考虑前 p 项

$$a, a+d, a+2d, \dots, a+(p-1)d.$$

让 r_0, r_1, \dots, r_{p-1} 表示 p 除上面各项所得的 p 个余数。由于每项都是素数，并且 $p < n \leq a$ （最小项），所以 p 除不尽任何项，故无一余数为零。因为这 p 个余数都只是从 $p-1$ 个非零余数 $1, 2, \dots, p-1$ 取的，用重叠原则可以证明其中有两个相等，比如 $r_i = r_j$ （ $i \neq j$ ），于是

$$a+id \equiv a+jd \pmod{p},$$

$$(i-j)d \equiv 0 \pmod{p}.$$

换句话说, p 整除 $(i-j)d$. 但 p 是素数且除不尽 d , 因而必然有 $p \mid i-j$. 然而 i, j 都是比 p 小的正整数, 欲使 $p \mid i-j$ 成立, 唯有 $i-j=0$, 这就得出 $i=j$ 这个矛盾. 因此, 素数 $p (< n)$ 必除尽 d .

$n=12$ 个相邻素数项就要求 d 被小于 12 的每个素数, 即 2, 3, 5, 7, 11 所整数. 因而 d 必然是 $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$ 的倍数, 而这又超过了 2000, 于是得到要证的结论.

W·谢尔宾斯基 (Sierpinski) 的辉煌论著《Theory of Numbers》(数论) (1964) 中有许多这方面的有趣材料 (121—125 页). 例如, 算术级数中的 10 个相邻项

$$199, 409, 619, \dots, 199 + 9(210)$$

都是素数; 又

$$4943 + k(60060), k = 0, 1, \dots, 12$$

这 13 项都是素数.

要想算术级数的相邻 $n=5$ 项都是素数, 必须 2 与 3 能除尽公差 d , 因此 d 必须是 6 的倍数. $d=6$ 时我们有下面的例子:

$$5, 11, 17, 23, 29.$$

不过这也是 $d=6$ 的算术级数中相邻 5 项均为素数的仅有的一例了. 因为, 在这样的级数中的任何相邻 5 项

$$a, a+6, a+2\cdot6, a+3\cdot6, a+4\cdot6$$

必然含有一项是 5 的倍数. 我们有 $a+i\cdot6\equiv a+i\pmod{5}$. 无论什么 a 都关于模 5 同余, $i=0, 1, 2, 3, 4$ 中必有一值使得 $a+i\equiv 0\pmod{5}$. 对素数项而言, 必有一项就是 5. 事实上, 5 必然就是那首项 (因为 $5-6=-1$ 不能置于 5 前) 结果便得到 5, 11, 17, 23, 29.

四十三、关于

彻伐^①线

假设 BC 是 $\triangle ABC$ 的最长边，在此三角形内部任选一点 O ， AO 、 BO 、 CO 分别交对边于 A' 、 B' 、 C' ，证明

$$OA' + OB' + OC' < BC.$$

解答 从三角形的顶点通过三角形到达对边的线段叫做“彻伐线”。显然从一个顶点所作的彻伐线的长度小于交于该顶点的两条边中的长边。因此，三角形的最长边比它的任何一条彻伐线都长，故 BC 比 AA' 、 BB' 、 CC' 都长。

令 OX 与 OY 分别平行于 AB 与 AC ，因此 $\triangle OXY$ 与 $\triangle ABC$ 相似（图56）。由于 BC 是 $\triangle ABC$ 的最长边，所以其对应边 XY 也就是 $\triangle OXY$ 的最长边，因而 $XY >$ 彻伐线 OA' 。

令 XS 与 YT 分别平行于 CC' 与 BB' ，那末， $\triangle BXS$ 与 $\triangle BCC'$ 相似。显然 BC 是 $\triangle BCC'$ 的最长

^①为纪念意大利数学家乔万尼·彻伐（Giovani Ceva）而命名的线段——译者注。

故其对应边 BX 也是 $\triangle BXS$ 的最长边。于是

$$BX > SX = OC' \quad (\text{在平行四边形 } C'XSO \text{ 中}).$$

类似还有

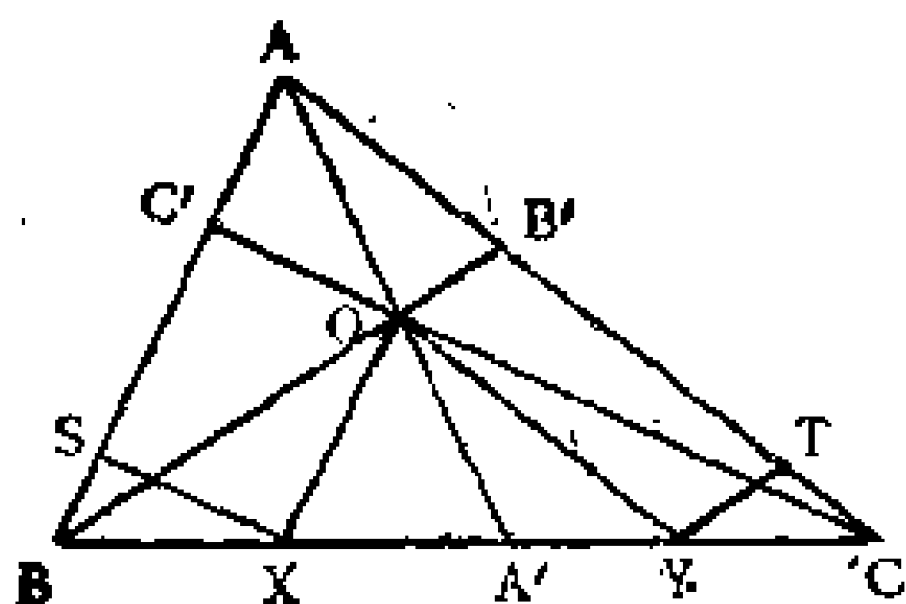


图 56

$$YC > YT = OB'.$$

相加得

$$\begin{aligned} OA' + OB' + OC' &< XY + YC + BX \\ &= BC. \end{aligned}$$

刚才证明了 $OA' + OB' + OC' <$ 最长边 BC .
现在假设 AA' 是三条彻伐线 AA' 、 BB' 、 CC' 中最长的一条, 试证明更强的结论:

$$OA' + OB' + OC' \leq AA'$$

解答 设

$$\frac{OA'}{AA'} = x, \quad \frac{OB'}{BB'} = y, \quad \frac{OC'}{CC'} = z.$$

分别作 AD 、 OE 垂直于 BC (图 57) . 则 $\triangle ADA'$ 与 $\triangle OEA'$ 相似, 因此

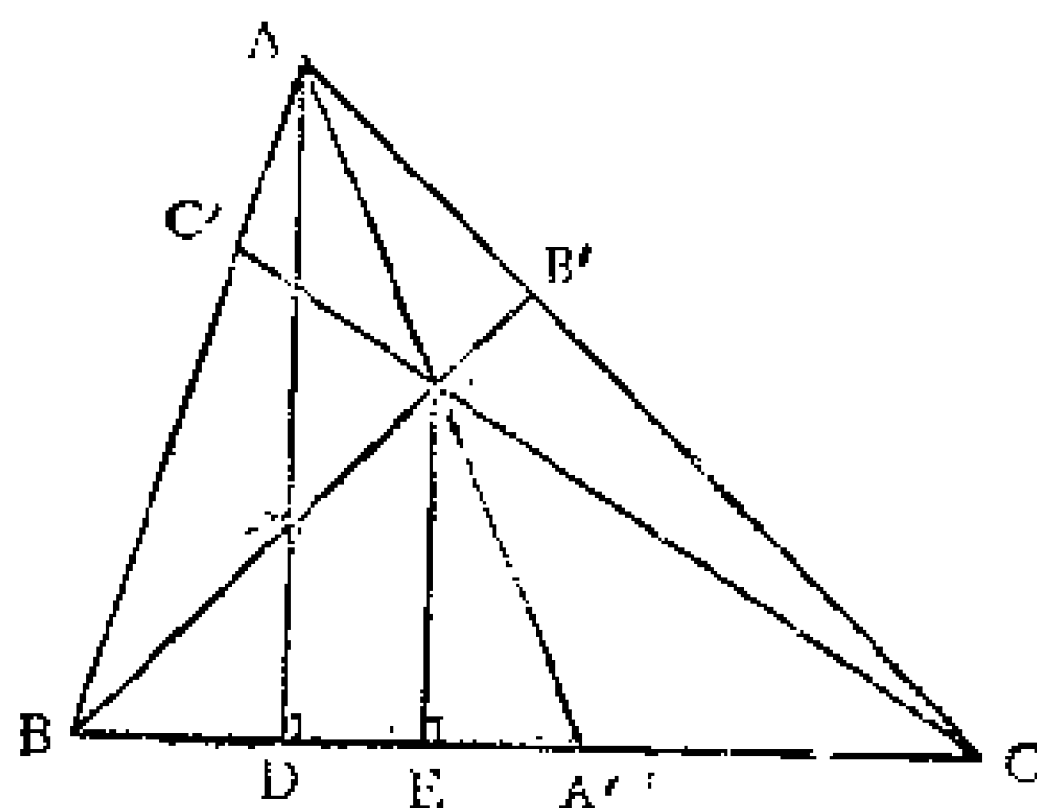


图 57

$$\frac{OE}{AD} = \frac{OA'}{AA'} = x.$$

而

$$\frac{\triangle OBC}{\triangle ABC} = \frac{\frac{1}{2} \cdot BC \cdot OE}{\frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD} = \frac{OE}{AD} = x,$$

所以有 $\triangle OBC = x(\triangle ABC)$. 类似有 $\triangle OCA = y(\triangle ABC)$, $\triangle OAB = z(\triangle ABC)$. 因为 $\triangle ABC = \triangle OBC + \triangle OCA + \triangle OAB = (x + y + z)(\triangle ABC)$, 我们得到 $x + y + z = 1$.

于是我们有

$$\begin{aligned} OA' + OB' + OC' &= xAA' + yBB' + zCC' \\ &\leq x \cdot AA' + y \cdot AA' \\ &\quad + z \cdot AA' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (x+y+z) \cdot AA' \\
 &= AA'.
 \end{aligned}$$

注意，仅当 $AA'=BB'=CC'$ 时等号才成立。



四十四、牛和羊

有两个人共同占有 x 头牛，他们以每头牛 x 元的价钱把牛卖了，把卖牛的钱按每头羊12元的价钱买了羊。因为他们卖牛所得的钱不能被12整除，便把剩下的钱买了一头羊羔。然后两人把羊群等分，各人得到的头数一样多。分到羊羔的那个人自然稍稍吃了点亏。为了弥补起见，另外那个人便给他一把口琴。试问口琴值多少钱？

解答 卖牛总收入是 x^2 元。要是 x 能被6整除，那末 x^2 就会被36整除，因而也就会被12所整除。但题设它不能被12整除，所以 x 不是6的倍数。这样就有 $x=12k+r$ ，其中 $|r|=1, 2, 3, 4, 5$ 。因此

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{12} &= \frac{(12k+r)^2}{12} = \frac{144k^2 + 24kr + r^2}{12} \\ &= 12k^2 + 2kr + \frac{r^2}{12}.\end{aligned}$$

因为每人占有同样头数的羊，所以羊的总头数必定是偶数，考虑到有一头是羊羔，故大羊的头数是奇数。两人用 x^2 元能买到的大羊的头数是 $x^2/12$

中的商，它应该是奇数.由于 $12k^2+2kr$ 是偶数，所以 $r^2/12$ 中的商数应为奇数.为此， r^2 必须大于12，这表明 $|r|=4$ 或5.当 $|r|=5$ 时

$$\frac{r^2}{12} = \frac{25}{12} = 2 + \frac{1}{12},$$

其中的商数是偶数.因此必有 $|r|=4$ ， $r^2=16$.于是

$$\frac{r^2}{12} = \frac{16}{12} = 1 + \frac{4}{12},$$

余数为4（不是一4），因此羊羔值4元，所以一人得到一头4元的羊羔，另一人得到一头12元的羊.一把4元的口琴就可以把他们拉平成8元的所得.

四十五、平方序列

证明：序列

$$49, 4489, 444889, 44448889, \dots, \underbrace{44 \cdots 4}_n \underbrace{88 \cdots 8}_n 89,$$

\dots ，的每一项都是完全平方。

解答 通项是

$$\begin{aligned} T = \underbrace{44 \cdots 4}_n \underbrace{88 \cdots 8}_n 89 &= 9 + 8 \cdot 10 + 8 \cdot 10^2 + \cdots \\ &\quad + 8 \cdot 10^n + 4 \cdot 10^{n+1} + 4 \cdot 10^{n+2} + \cdots \\ &\quad + 4 \cdot 10^{2n+1}. \end{aligned}$$

把 9 分解成 $1+4+4$ ，8 分解成 $4+4$ ，我们得

$$\begin{aligned} T &= 1 + 4(1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^n) + 4 + \\ &\quad (1 + 10 + \cdots + 10^{2n+1}) \\ &= 1 + 4 \cdot \frac{10^{n+1} - 1}{9} + 4 \cdot \frac{10^{2n+2} - 1}{9} \\ &= \frac{4 \cdot 10^{2n+2} + 4 \cdot 10^{n+1} + 1}{9} = \left(\frac{2 \cdot 10^{n+1} + 1}{3} \right)^2 \end{aligned}$$

因为 $2 \cdot 10^{n+1} + 1$ 的各位数字之和是 $2+1=3$ ，它能被 3 整数，故上式右端总是一个整数的平方。

四十六、内接 十边形

自古希腊时代起，作圆内接正多边形的问题一直很受数学家的关心，欧几里德就写过这方面的文章，并且给出了画圆内接正十边形的一个巧妙方法。我们首先指出，半径为 r 的圆内接正十边形的边长 x 为

$$x = \frac{r}{2} (\sqrt{5} - 1) .$$

注意，边 $AB=x$ 所对圆心角为 36° （图58）。因之三角形 OAB 是底角为 72° 的等腰三角形。

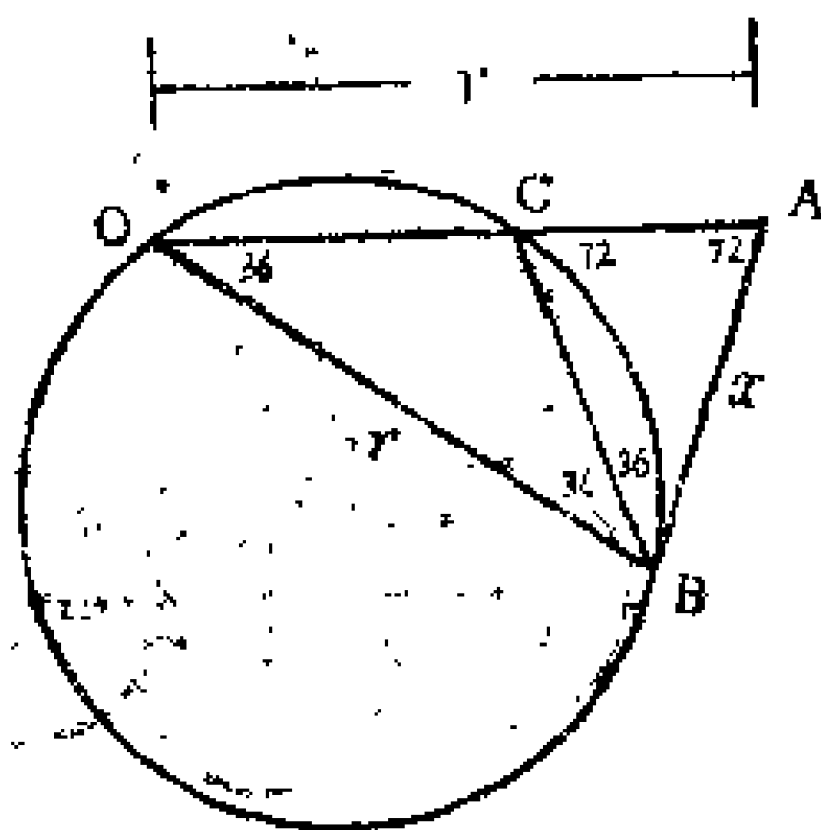


图 58

令 BC 平分 $\angle B$ ，那末 $\triangle ABC$ 与 $\triangle OAC$ 都是等腰三角形，因而 $x = AB = BC = OC$ 。所以 $AC = r - x$ 。

考虑外接 $\triangle OBC$ 的圆。由于 $\angle ABC$ 与弦 BC 所对圆周角 $\angle O$ 相等，所以 AB 与圆相切，因此

$$x^2 = AO \cdot AC = r(r - x) = x^2 - rx,$$

$$x^2 + rx - r^2 = 0,$$

$$x = \frac{-r \pm \sqrt{5r^2}}{2}.$$

因为 x 是正数，故

$$x = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

此即所证。

现在我们来研究班科夫 (Bankoff) 博士的著名问题。先作一个等边三角形 KAB (图59)，在其周围作六个相等的圆，其中三个在三边的中点与

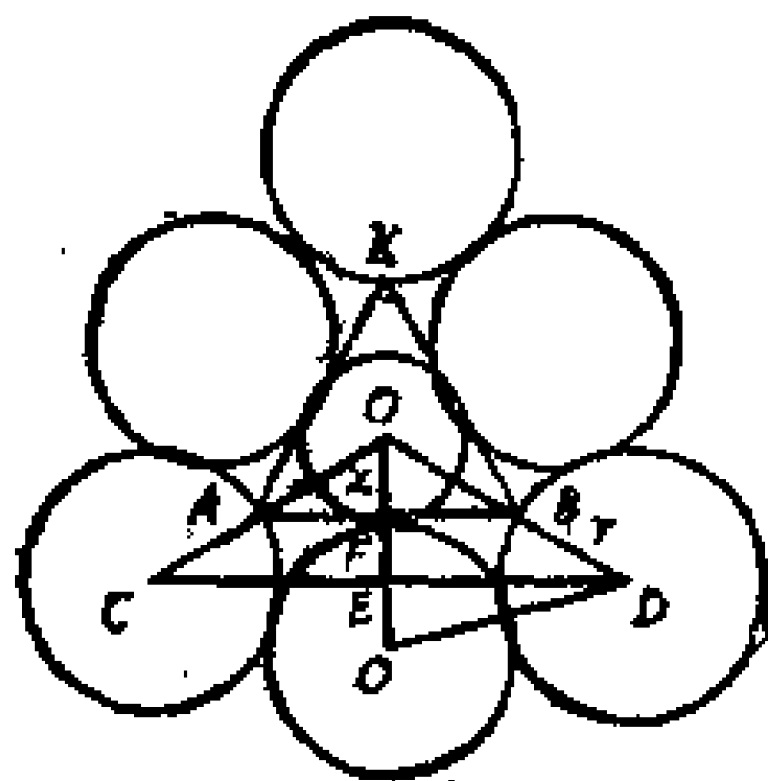


图 59

三边相切，另外三个过顶点且圆心在三条分角线的

延长线上. 这六个圆同样地逐渐增大, 直至它们相切为止. 它们围着固定的三角形组成一个环, 环由半径为 r 的六个等圆构成. 令人十分惊讶的是, 三角形 KAB 的内切圆的半径 x 竟然就是环中每个圆的内接正十边形的边长. (会有人发现这点, 难道不令人吃惊么?)

不难看出等边三角形的内径 (内切圆的半径) x 是高 (也即中线, 分角线) 的三分之一. 看图即知

$$OB = \frac{2}{3} (\text{高}) = 2x.$$

显然 AB 与 CD 平行. 因此

$$\frac{EF}{OF} = \frac{DB}{BO}, \quad \frac{EF}{x} = \frac{r}{2x}, \quad \text{故 } EF = \frac{r}{2}.$$

于是 $O'E = r/2$, 即半径 $O'F$ 的另一半.

由直角三角形 OED 可知

$$\begin{aligned} ED^2 &= OD^2 - OE^2 \\ &= (2x + r)^2 - \left(x + \frac{r}{2}\right)^2 \\ &= 3x^2 + 3rx + \frac{3}{4}r^2. \end{aligned}$$

因此由直角三角形 $O'ED$ 可知

$$\begin{aligned} O'D^2 &= ED^2 + O'E^2, \\ 4r^2 &= \left(3x^2 + 3rx + \frac{3}{4}r^2\right) + \frac{1}{4}r^2, \end{aligned}$$

$$r^2 = x^2 + rx, \quad x^2 + rx - r^2 = 0,$$

同前面一样得到

$$x = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

四十七、红点 与蓝点

考虑20行20列红点与蓝点组成的正方形点阵。只要同一行或同一列中相邻两点颜色相同时，就与它们的颜色相同的线段把它们联结起来；颜色不同的相邻点则用黑色线段来联结。共有219个红点，其中39个点在方阵的边界上，但四角处不是红点。假定共有237条黑色线段。试问有多少条蓝色线段？

解答 20行的每行中有19条线段，故有 $19 \cdot 20 = 380$ 条水平线段，又有同样多条垂直线段，故总共有760条线段，因为有237条是黑色，故另外523条是红色与蓝色。

用 r 表示红线段的条数，我们来数一数红点作为线段端点出现多少次。每条黑线段有一个红端点，每条红线段有两个红端点，所以红端点的总数是

$$237 + 2r,$$

但是边上的39个红点每一个都是3条线段的端点，阵列内部的其余180个红点每一个都是4条线段的端点。因此红点是线段端点的总次数是

$$30(3) + 180(4) = 837.$$

从而

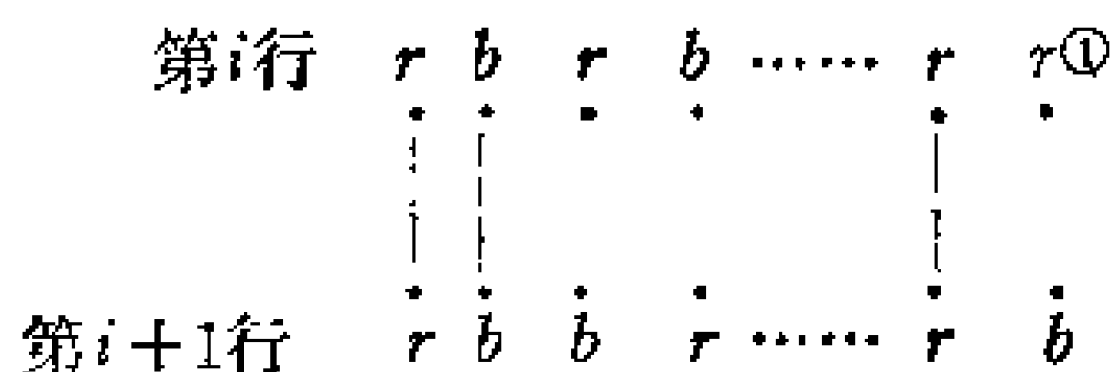
$$237 + 2r = 837, \text{ 故 } r = 300.$$

于是蓝线段的条数是 $523 - 300 = 223$.

美国数学月刊1971年796页上载有一个类似问题(E2251号问题), 是西蒙·弗雷泽大学的 T.C. 布朗 (Brown) 提出的, 由菲利普斯·艾克西托学院的斯蒂芬·B·毛列尔 (Maurer) 解决:

考虑具有偶数个行与偶数个列由红点与蓝点组成的矩形阵列, 每行有一半是红点, 一半是蓝点, 每列也是如此. 在一行或一列中只要相邻两点颜色相同, 就用一段与它们颜色一样的线段联结起来. 证明红线段总数与蓝线段总数相等.

解答 考虑相邻的两行, 比如第 i 行与第 $i+1$ 行. 如果颜色相同的两点面对面, 就用线段把它们联成一对. 我们称这种点为“匹配”点.



颜色不同的一对为“失配”点. 因为每行有一半的点是红色, 另一半的点是蓝色, 所以每行有同样多

① r 表示红点, b 表示蓝点. ——译者注

个红点. 显然, 相邻两行有同样多的匹配红点, 因此也必定有同样多的失配红点.

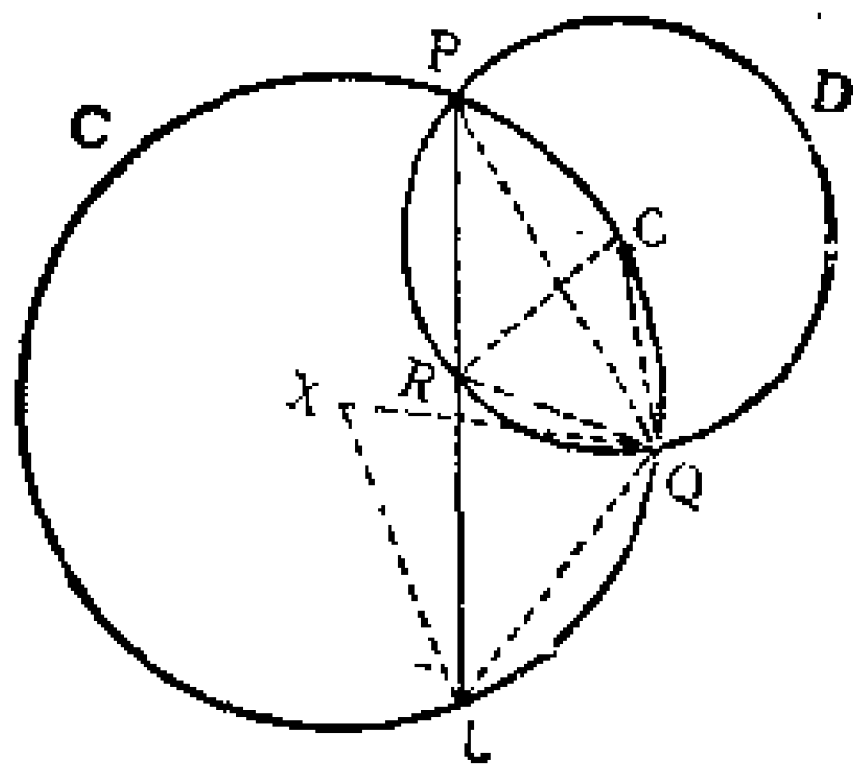
由于第 i 行的一个失配红点对着第 $i+1$ 行的一个失配蓝点, 所以

$$\begin{aligned} & \text{第 } i+1 \text{ 行的失配蓝点个数} \\ &= \text{第 } i \text{ 行的失配红点个数} \\ &= \text{第 } i+1 \text{ 行的失配红点个数.} \end{aligned}$$

于是在第 $i+1$ 行中失配红点与失配蓝点一样多. 由于第 $i+1$ 行的红点总数与蓝点总数相同, 所以第 $i+1$ 行的匹配红点个数与匹配蓝点个数一样多, 这意味着在两行间搭桥的线段, 红色的和蓝色的一样多. 对相邻的列来说, 情况也是这样. 故得要证的结论.

1. The first group of people who are interested in the study of the history of the United States are the people who are interested in the history of the United States.

如图60, 以圆周 C 上任意一点 O 为心作圆 D 交 C 于 P, Q , 以 Q 为心用相同的半径在 C 内部截 D 于 R



20

令 PR 交 C 于 L , 则 QL 为 C 之半径 (LR 也是) .

解答 $\triangle QOR$ 的三条边显然都等于 D 的半径, 因而 $\triangle QOR$ 为等边三角形, $\angle ROQ = 60^\circ$. 所以, (两圆的) 圆周角 $\angle RPQ = 30^\circ$, C 的圆心 X 处的角等于 60° . 因此, $\triangle XQL$ 是等边三角形, 从而 $QL = r$ (半径) .

(不难证明三角形 RQL 与 XOQ 全等, 然后可得 $RL = OX = r$.)

四十九、关于

$\pi(n)$

很早以来，素数就是数学家特别感兴趣的题目。关于这个引人入胜的内容的深入浅出的讨论，请读W. 谢尔宾斯基的《数论》^①第三章（110—155页）。关于素数的最有趣的函数有一个是 $\pi(n)$ ，它是不超过自然数 n 的素数的个数。

问题：证明 $\pi(n) \geq \frac{\log n}{\log 4}$ 。

解答 下面的初等证明是杰出的匈牙利数学家保尔·厄尔迪什发现的（见前面提到的谢尔宾斯基的著作第130页）。

令 m 表示自然数。设 k^2 是能整除 m 的最大平方数，因而 $m = k^2 v$ 。于是 v 不能含重因子，不然就有比 k^2 大的平方也能整除 m （ v 叫做 m 的“非平方”部分）。

现在让 n 表示一个确定的自然数，并考虑自然数 $m \leq n$ ，把数 $m = 1, 2, \dots, n$ 的每一个都表示

^①W. Sierpinski, Theory of Numbers.

成 $m=k^2v$ 的形状, 这里 v 无重因子. 由于在所有情况下, $k^2 \leq m \leq n$, 故 k 必定是 $1, 2, 3, \dots, [\sqrt{n}]$ 中的一个, 这里 $[\sqrt{n}]$ 表示不超过 \sqrt{n} 的最大整数. 又因 $v \leq m \leq n$, 所以 v 的所有素因子必来自 $\leq n$ 的素数中, 即取自 $p_1, p_2, \dots, p_{\pi(n)}$. 既然 v 是这定个集合中的素数的乘积, 它必定是

$$p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_{\pi(n)}^{a_{\pi(n)}}$$

这种数的某一个, 这里的指数 a_i 或等于 0 或等于 1 (因为 v 无重因子). 由于每个 a_i 可等于 0 或 1, 所以这种形状的数共有 $2^{\pi(n)}$ 个. 总之, 对每个 $m=k^2v \leq n$, v 无重因子, k 必属于 $[\sqrt{n}]$ 个数的集合

$$X = (1, 2, 3, \dots, [\sqrt{n}]),$$

而 v 则必属于 $2^{\pi(n)}$ 个数的集合

$$Y = (p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_{\pi(n)}^{a_{\pi(n)}}, a_i = 0 \text{ 或 } 1).$$

这样一来 $m=1, 2, \dots, n$ 的每个数都要在 X 中得到一个 k , 在 Y 中得到一个 v , 使得 $m=k^2v$. 反之, 通过在 X 中选取适当的 k , 在 Y 中选取适当的 v , 也可以造出形如 k^2v 的数 $1, 2, \dots, n$. 因此, 用一切可能的方式从 X 中选一个 k , 从 Y 中选一个 v , 造一个 k^2v 的这个手续可以造出包含 $1, 2, \dots, n$ 这 n 个数的数集. 但这种造法共造出了 $[\sqrt{n}] \cdot 2^{\pi(n)}$

个数.

因此我们得

$$[\sqrt{n}] \cdot 2^{\pi(n)} \geq n.$$

而由定义有 $\sqrt{n} \geq [\sqrt{n}]$, 所以

$$\sqrt{n} \cdot 2^{\pi(n)} \geq n, \quad 2^{\pi(n)} \geq \sqrt{n},$$

$$\pi(n) \log 2 \geq \frac{1}{2} \log n,$$

$$\pi(n) \geq \frac{\log n}{2 \cdot \log 2} = \frac{\log n}{\log 4}.$$

十九世纪时, 俄国数学家P. 契比雪夫(Tchebyscheff) 证明了更强的定理:

$$\pi(n) > \frac{n}{12 \cdot \log n}.$$

(谢尔宾斯基的《数论》第149页上有证明.)

美国数学月刊1944年第479页的 4083 号问题是保尔·厄尔迪什提出的关于 $\pi(n)$ 的一个简短问题, 由俄勒岗大学的惠特尼·斯各贝特(Scoberl) 解决:

如果 $a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leq n$ 是自然数的任一数列, 其中每个 a_i 都不能整除其余数的乘积, 试证明 $k \leq \pi(n)$.

解答 因为每个 $a_i \leq n$, 所以都有素数分解式

$$a_i = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_{\pi(x)}^{a_{\pi(x)}}.$$

要使 a_i 不能整除其它 a 的乘积, a_i 必须含有某个素数
 $p_i \in (p_1, p_2, \dots, p_{\pi(n)})$, 其次 数大于其余全部
 a 的分解式中 p_i 的次数之和. 这样一来, a_i 包含的这
 一 p_i 的次数必定大于每个别的 a 中 p_i 的 次数. 每个
 a_i 有这样一个 p_i , 然而显然不可能有两个 a_i 可以
 这样地与同一个 p_i 相联系. 所以 a_i 的个数不可能比
 $(p_1, p_2, \dots, p_{\pi(n)})$ 中素数的个数多, 因而得 $k =$
 $\pi(n)$.

五十、定长弦

设两圆 Q 与 R 相交于点 A 与 B (图61) . Q 上位于 R 外的弧上有一点 P , 它通过 A 、 B 投影在 R 上得一弦 CD . 试证明: 无论在弧上何处选择 P , 弦 CD 的长度永远不变.

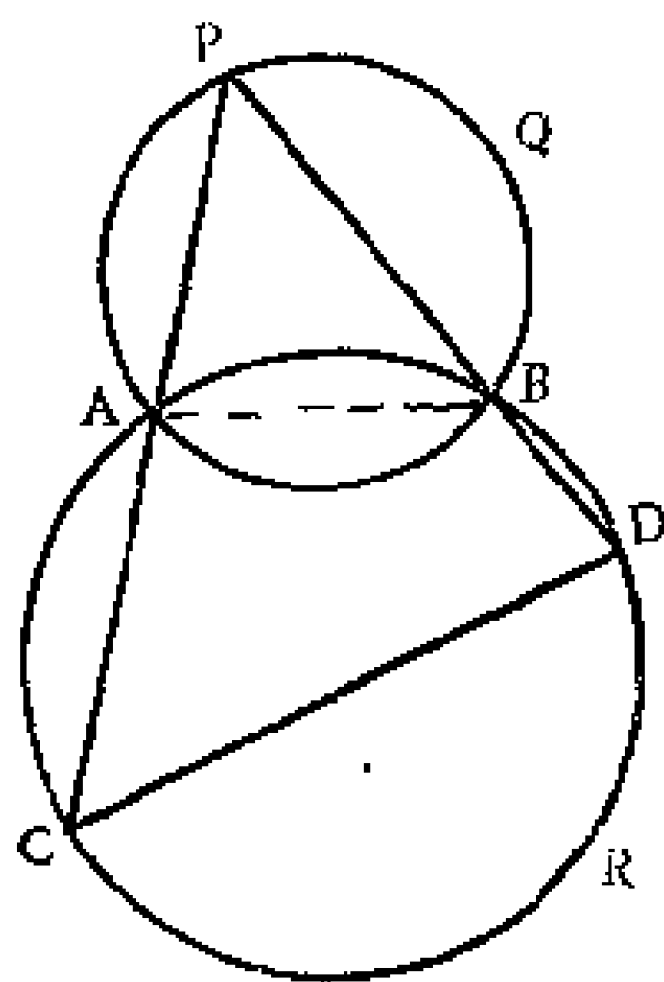


图 61

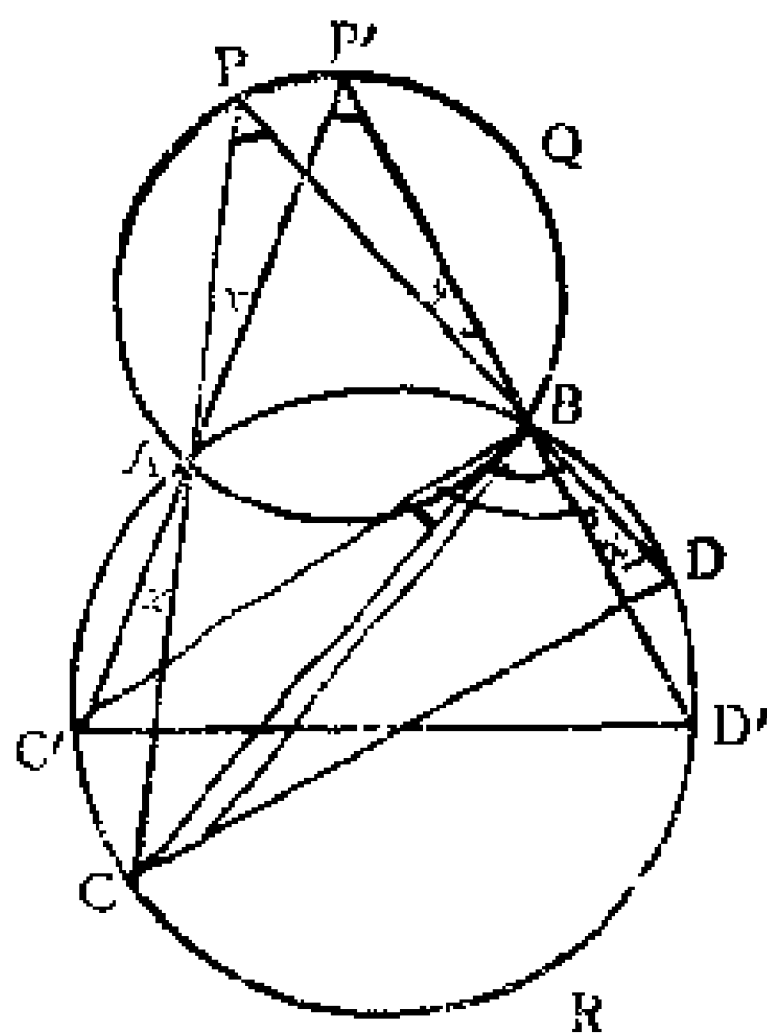


图 62

解答 令 P 与 P' 表示与弦 CD 与 $C'D'$ 相对应的点(图62)我们有

$$\angle PAP' = \angle PBP',$$

$$\angle PAP' = \angle CAC',$$

$$\angle PBP' = \angle DBD',$$

由此得 $\angle CAC' = \angle DBD'$. 这就是说, 弧 $CC' =$ 弧 DD' . 两端加上弧 CD' 得

$$\text{弧 } C'D' \approx \text{弧 } CD,$$

因此得

五十一、内对角线 的条数

自身不相交的多边形叫简单多边形，然而简单多边形远非凸多边形，它有许多对角线全部或部分地在多边形外面。尽管如此，任何简单 n 边形至少有 $n-3$ 条对角线完全在其内部，试证明之。

解答 对四边形结论显然是成立的（图63）。

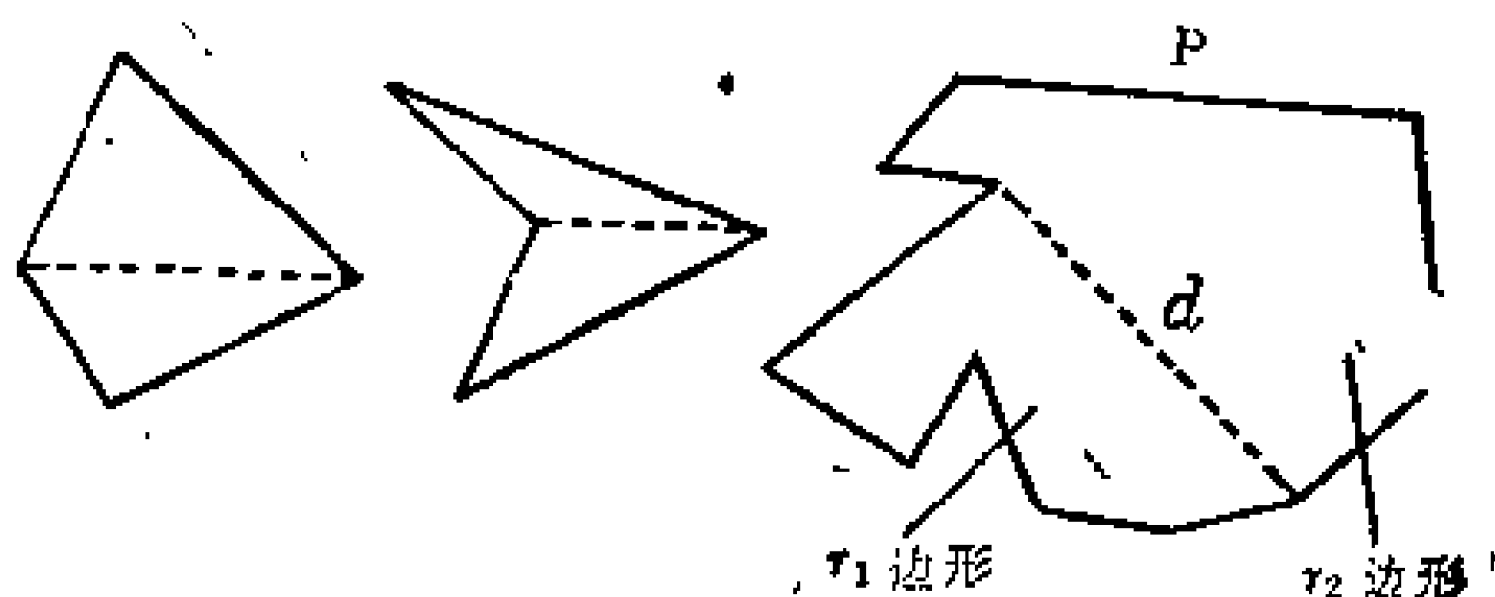


图 63

今设该论断对 k 边形也成立， $k=4, 5, \dots, n$ 。我们考虑简单 $(n+1)$ 边形 P 。对任何一个多边形来说，不可能在其内部一条对角线也没有。关于这个结论的证明，读者可以读 Ross Honsberger: *Ingenuity in Mathematics*(数学技巧), vol. 23, New Mathematical Library, Mathema-

tical Association of America, p. 35 (美国数学会的新数学文库. 第23卷, 第35页). 用 d 表示全在 P 内的一条对角线. 设 d 将 P 分成一个 r_1 边形与一个 r_2 边形, 那末由归纳假设知, P 至少有 $r_1 - 3$ 条以及 $r_2 - 3$ 条内对角线在两个子多边形内. 把 d 算进去, P 内至少有 $r_1 + r_2 - 5$ 条内对角线.

两个子多边形的总边数是 $r_1 + r_2$, 这包括 P 的全部 $n + 1$ 条边, 另外加对角线 d 算了两次. 因此 $r_1 + r_2 = n + 3$, 故 P 至少有

$r_1 + r_2 - 5 = n + 3 - 5 = n - 2 = (n + 1) - 3$ 条内对角线. 归纳法证明了我们的论断正确.

由于对每个自然数 n 我们都作出一个 n 边形, 它

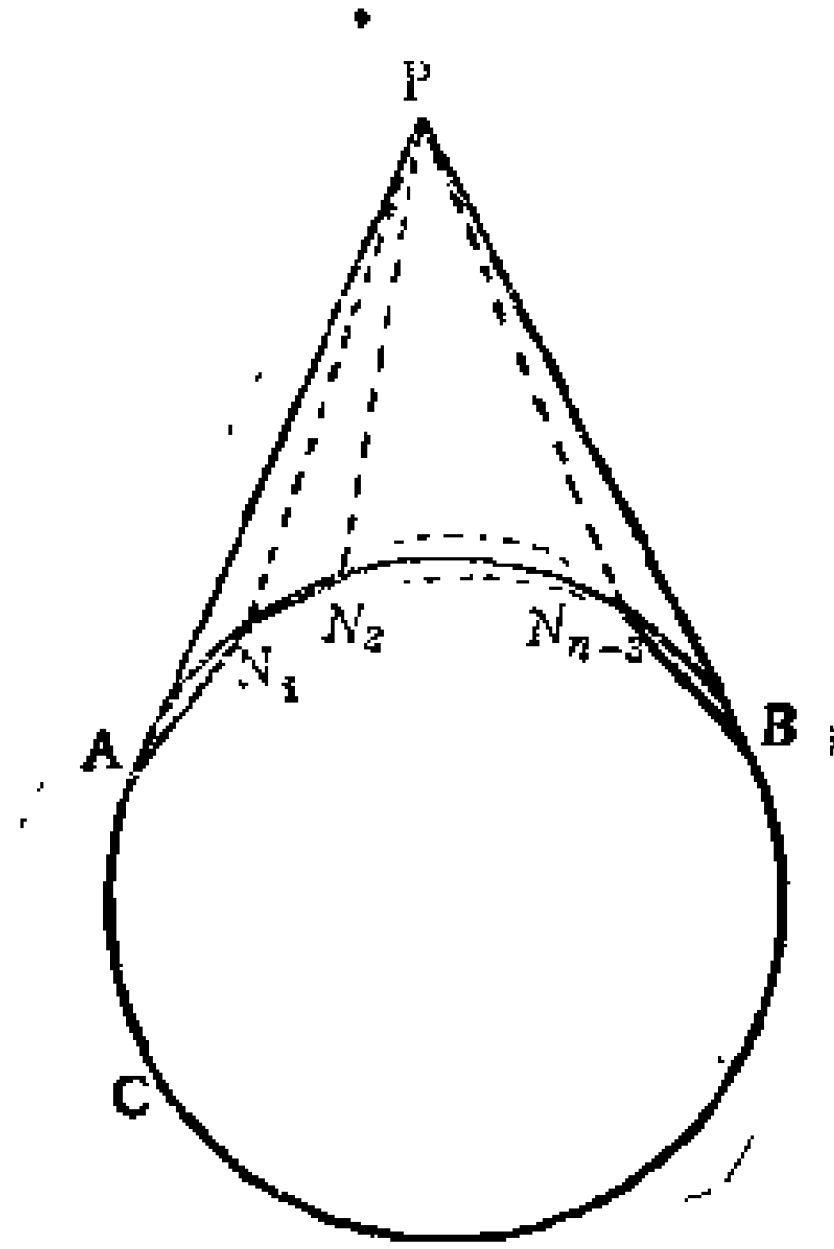


图 64

不多不少恰好有 $n-3$ 条内对角线，所以 $n-3$ ，就是我们始终可以靠得住的这种对角线的最大条数。令圆 C 在 A 、 B 的两条切线交于 P （图64），在靠近 P 的那段弧 AB 上取点 N_1, N_2, \dots, N_{n-3} ，得一个 n 边形 $PAN_1N_2\cdots N_{n-3}B$ ，它恰好有 $n-3$ 条内对角线 PN_i ，每条都由 P 发出。

澳大利亚的 R. B. 艾格顿 (Eggleton) 证明了，简单 n 边形恰好有 $n-3$ 条内对角线的充要条件
 是此多边形的任何两条内对角线不相交。

五十二、掷骰子 (二)

试证明：不可能使一对骰子等可能地出现点数和2, 3, …, 12。按惯例假设两颗骰子是可区别的（例如，第一颗骰子现2与第二颗骰子现4不同于第一颗现4与第二颗现2，尽管得出的点数和都是6）。

解答 用 p_i 表示第一颗骰子出现 i 的概率， q_i 表示第二颗骰子出现 i 的概率，那末得到点数和为2的概率是 $p_1 p_1$ ，得到点数和为12的概率是 $p_6 q_6$ 。要是全部十一个概率都一样，那末每个概率就会是 $1/11$ ，得7的概率是

$$\begin{aligned} \frac{1}{11} &= p_1 q_6 + p_1 q_6 + \cdots + p_6 q_1 \\ &\geq p_1 q_6 + p_6 q_1 = p_1 q_6 \left(\frac{q_1}{q_1} \right) + p_6 q_1 \left(\frac{q_6}{q_6} \right) \\ &= p_1 q_1 \left(\frac{q_6}{q_1} \right) + p_6 q_6 \left(\frac{q_1}{q_6} \right) = \frac{1}{11} \left(\frac{q_6}{q_1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{11} \left(\frac{q_1}{q_6} \right) \\ &= \frac{1}{11} \left(\frac{q_6}{q_1} + \frac{q_1}{q_6} \right) . \end{aligned}$$

因此我们得

$$\frac{q_0}{q_1} + \frac{q_1}{q_0} \leq 1.$$

然而正实数及其倒数之和 $x + \frac{1}{x}$ 至少等于 2，因而证明了我们的论断。

五十三、古怪的 数列

我们浏览自然数 $1, 2, 3, \dots$, 从中挑选出一个数列 U . 选法是取

第一个奇数, (即 1)
紧后边的两个偶数, (2 与 4)
紧接着的三个奇数, (5, 7, 9)
紧接着的四个偶数, (10, 12, 14, 16)
紧接着的五个奇数, (17, 19, 21, 23, 25)
一直进行下去.

$U: 1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16,$
 $17, 19, \dots$

证明第 n 项 u_n 的公式是

$$u_n = 2n - \left[\frac{1 + \sqrt{8n-7}}{2} \right],$$

这里 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数.

解答 我们把 U 与 偶数作成的数列 E 来对比,
并把对应项之差作成的数列表示为 $D \equiv \{d_n\}$. 我们
将会发现 D 包含一个 1, 两个 2, 三个 3, \dots , n 个 n ,

...， U 的项按一项一组，两项一组，三项一组，...
来确定，在每组之内，无论是奇是偶，它的项都是

$$E \equiv \{2n\}: 2, |4, 6, |8, 10, 12, |14, 16, 18, 20, |22, \dots,$$

$$U \equiv \{u_n\}: 1, |2, 4, |5, 7, 9, |10, 12, 14, 16, |17, \dots,$$

$$D \equiv \{d_n\}: 1, |2, 2, |3, 3, 3, |4, 4, 4, 4, |5, \dots,$$

逐项递增 2，就象偶数按 2 递增一样。这样一来，
差数的数列 D 在每组内保持不变，然而当其从前面
一组过渡到后面一组时，偶数仍然按 2 递增，而数
列 U 中从奇组到偶组或从偶组到奇组，却是按 1 递
增，因此差数的数列从一组过渡到下一组时递增
1，于是 D 的项便如前面所说的 那样，通过求出 d_n
的公式，我们便从关系式

$$u_n = 2n - d_n$$

求出 u_n 的公式。

下面对特定的 n 来求 d_n ，我们已经讲过， D 的
项成组地以相同值出现：

$$(1), (2, 2), (3, 3, 3), \dots, (\underbrace{k-1, k-1, \dots}_{k-1 \text{ 个}}),$$

$$(\underbrace{k, k, \dots}_{k \text{ 个}}), \dots$$

我们需要找的是具体的 d_n 落入的那一组。若它落入
第 k 组，则它的值便是 k ，我们注意到，在第 k 组前
有

$$1 \text{ 个 } 1, 2 \text{ 个 } 2, 3 \text{ 个 } 3, \dots, (k-1) \text{ 个}$$

$$(k-1) ,$$

总共有

$$1+2+3+\cdots+(k-1)=\frac{(k-1)k}{2}\text{项}.$$

如果 d_n 落入第 k 组内, 那末由于它是 D 的第 n 项, 必须有

$$\frac{(k-1)k}{2}+1\leq n<\frac{[(k+1)-1](k+1)}{2}+1$$

例如, 如果 d_n 在第10组, 则

$$\frac{(10-1)10}{2}+1\leq n<\frac{(11-1)11}{2}+1.$$

这时自不待言我们也有 $(9-1)9/2+1\leq n, (8-1)8/2+1\leq n, \cdots, (1-1)1/2+1\leq n$. 在所有形如 $(m-1)m/2+1$ 的整数中, 是 $m=k$ 给出了 $\leq n$ 的最大值, 因此 $k=d_n$ 是满足 $(m-1)m/2+1\leq n$, 即

$$m^2-m+2(1-n)\leq 0$$

的最大值 m 。但是对于在方程 $m^2-m+2(1-n)=0$ 的两个根之间的闭区间内的任何 m 值, $m^2-m+2(1-n)$ 是非负的, 方程的根 m 的值是

$$\begin{aligned} m &= \frac{1 \pm \sqrt{1-8(1-n)}}{2} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{8n-7}}{2} \quad (\text{图65}) \end{aligned}$$

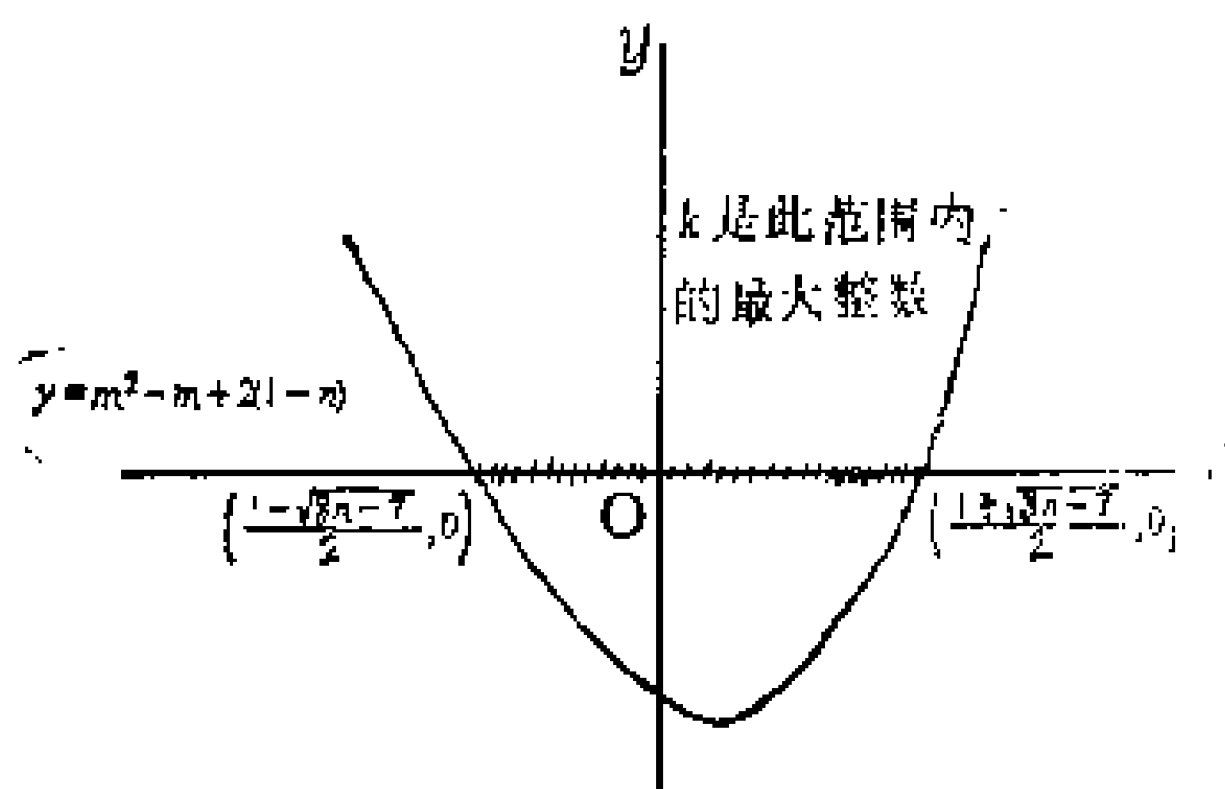


图 65

因此 k 是

$$\frac{1 - \sqrt{8n-7}}{2} \leq m \leq \frac{1 + \sqrt{8n-7}}{2}$$

范围内的最大整数。由于 k 是整数，我们有

$$d_n = k = \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor,$$

从而所求的公式就是

$$u_n = 2n - \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor.$$

(曼尼托巴大学的) 奈森·门德尔松 (Mendelson) 注意到不在 U 内的自然数作成的补数列

$$V \equiv \{v_n\}; \quad 3, 6, 8, 11, 13, 15, 18, \\ 20, 22, 24, 27, \dots$$

他指出 V 的项也是成组地出现，一个奇项，两个偶项，三个奇项，等等，并且指出，可以通过相加而不是象上面求 u_n 时那样通过从 $2n$ 减去 d_n 来求出 v_n 的

公式:

$$u_n = 2n + d_n = 2n + \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor.$$

这可立即由 $v_n + v_n = 4n$ 推出。证明这一点并不很难，留给读者当练习。

五十四、长长的

相邻自然数串

素数的个数固然是无穷多，然而自然数列中相邻素数间的空隙却也可以任意地大。这一点是很容易看出的，你看，对任意自然数 n ，

$$(n+1)! + 2, (n+1)! + 3, \dots, (n+1)! + (n+1)$$

便是 n 个相邻的复合数。

现在想请你证明的是，也有任意长的一段相邻自然数，其中每个数都可以被大于 1 的完全平方数整除。

解答 我们用归纳法证明，对于一切自然数 n ，都存在 n 个相邻自然数串，其中每个数都能被大于 1 的完全平方数所整除。

(i) $n=1$ 时，任何 >1 的平方都满足要求。

(ii) $n \geqslant 1$ 时，假设 n 个相邻的自然数

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

个个都能被 >1 的完全平方所整除，现在我们要寻找具有这个性质的 $n+1$ 个相邻自然数。

用 s_i 表示能整除 $a_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的大于 1 的

完全平方数，用 L 表示 s_i 的乘积，因为 a_i 是相邻数，所以 $a_2 = a_1 + 1$ ，等等，等等。用这种记法， $a_n + 1$ 表示成 a_{n+1} ，因此 $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ 就是 $n+1$ 个相邻数串。用 A 表示 $a_{n+1}(L+2)L$ 。由于 A 包含 L ，故 A 可以被每个 s_i 整除。现在来看 $n+1$ 个相邻自然数

$$A + a_1, A + a_2, \dots, A + a_{n+1}.$$

对于 $i=1, 2, \dots, n$ ，我们的 s_i 既整除 A 也整除 a_i ，这说明这些数的前 n 个中的每一个都可以被 >1 的平方所整除，而最后一个数是

$$\begin{aligned} A + a_{n+1} &= a_{n+1}(L+2)L + a_{n+1} \\ &= a_{n+1}(L^2 + 2L + 1) \\ &= a_{n+1}(L+1)^2. \end{aligned}$$

因 $s_i > 1$ ，故 $L > 1$ ，所以 $(L+1)^2$ 是 >1 的平方。这样一来全部 $n+1$ 个数都可以被 >1 的平方所整除。由归纳法便得出所需结论了。

同样还可以证明，对任何自然数 n ，都存在 n 个相邻自然数，其中每个数都能被 >1 的完全 m 次方所整除，这里 $m > 2$ 。为此只消把 s_i 取作 >1 的 m 次方，把 A 换成

$$A = a_{n+1}[(L+1)^m - 1].$$

注意，我们的论证不仅证明了所说的那种数列的存在，而且还说明了如何用迭代步骤作出这种数列。由于只要求 L 能被每个 s_i 整除，所以我们可以

把 L 取作 s_i 的最小公倍数而不必取作全部 s_i 的乘积。这样可以使 L 小些，减轻计算量。

我真的感到惊讶：沿着自然数数列看下去，到某处就有万亿个数（或者你高兴要多大就有多大）构成一串，其中每个数都能被 >1 的完全万亿次方所整除，而且，你若给出足够的时间，我硬是可以给你把这样的一串数写出来哩！

五十五、最小 内接四边形

设 $ABCD$ 是圆内接四边形，其对角线交于 X 。
 P 、 Q 、 R 、 S 是从 X 到 $ABCD$ 各边的垂足，证明在
 四边形 $ABCD$ 的每边上各有一点的所有四边形
 中， $PQRS$ 的周长最短。

解答 我们先证 PS 、 PQ 与 AB 夹成等角（图
 66），即

$$\angle APS = \angle BPQ.$$

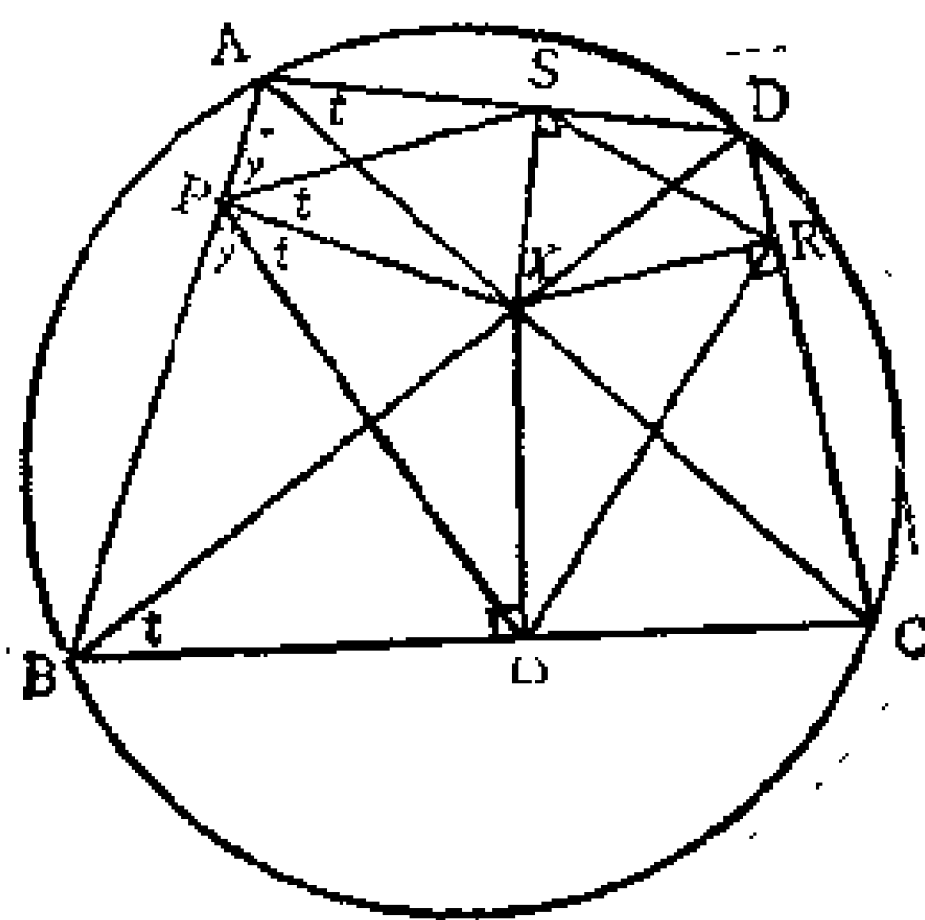


图 66

为此我们证明上述两个角的余角相等：

$$\angle SPX = \angle QPX.$$

因四边形 $PBQX$ 有二直角，故为圆内接四边形，于是 $\angle QPX = \angle QBX$ 。同样， $APXS$ 也是圆内接四边形，又有 $\angle SPX = \angle SAX$ 。而在已知圆内 $\angle CBD = \angle CAD$ ，因而 $\angle QPX = \angle SPX$ ，故得所求的结论。同样，在 $PQRS$ 的各项点处，各边与 $ABCD$ 的对应边夹成等角。

这样作的结果便是，将 $PQRS$ 对 $ABCD$ 的一条边作反射，在起镜面作用的线上相交的两条边的任一条的像都是另外那条边的延长线而已（图67）。

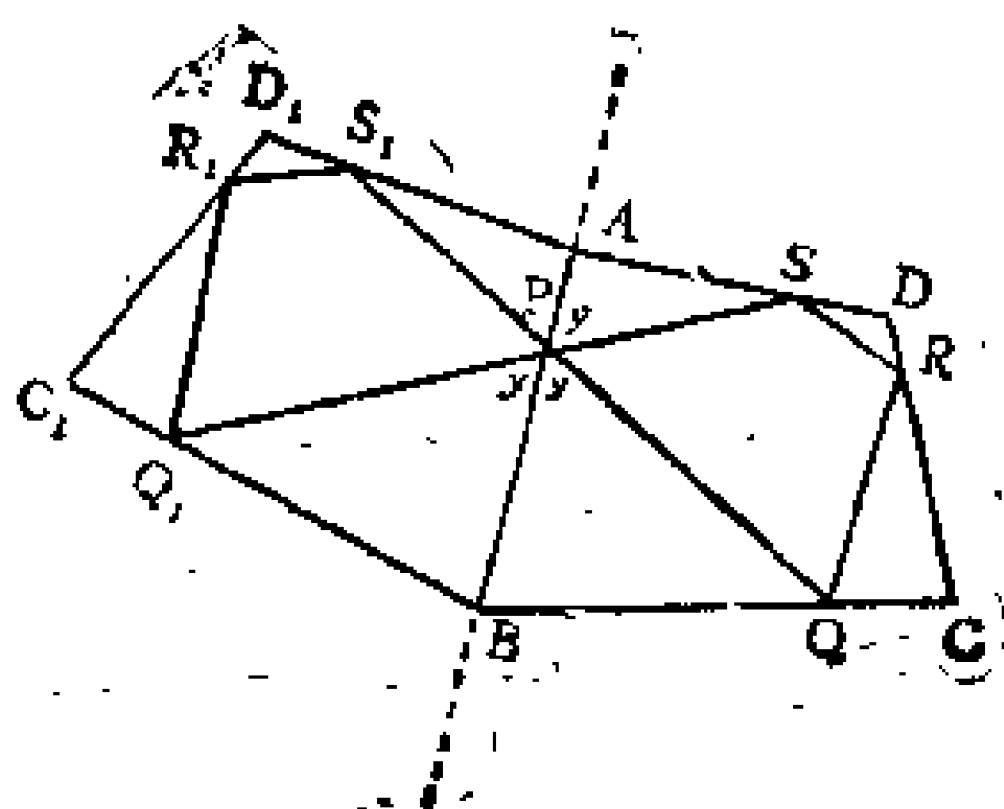


图 67

因 $\angle APB$ 是平角，故 $2y + \angle SPQ = 180^\circ$ 。经反射有 $\angle BPQ = \angle B P_1 Q_1 = y$ 。因此 $\angle Q_1 P S = 2y + \angle SPQ = 180^\circ$

因此如图68所示，我们可以通过三个反射 I，II，III把 $PQRS$ 的周长拉直。当然我们这儿只有

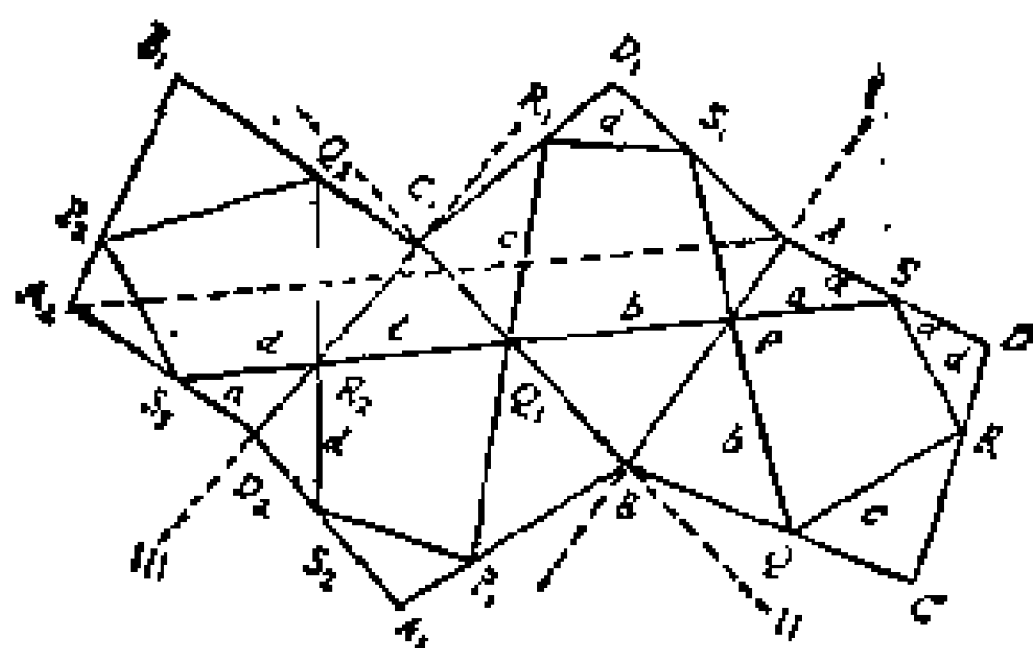


图 68

$ABCD$ 内的 $PQRS$ 的四个相靠接的全等图形。故 $AS = A_2S_3$ 。但交错角 $D_2S_3R_2$ 与 ASP 相等（都等于 $\angle DSR$ ），这表明 A_2S_3 平行于 AS ，因此 A_2ASS_3 是平行四边形，从而 $PQRS$ 的拉直了的周长 SS_3 等于 AA_2 。

上述那些反射可以把在 $ABCD$ 的每边上各有一个顶点的任意一个四边形的四边展开。如果 Y 是 AD 上的顶点， Y_3 是它在 A_2D_2 上的像，那末因为 A_2Y_3 与 AY 平行且相等，故 A_2AYY_3 是个平行四边形（图69），从而 $YY_3 = AA_2$ 。然而展开后的周长在 Y 与 Y_3 之间，如果 Y 形成折线，就比 Y_3 长，最短时也不超过与 YY_3 重合而已，这时就等于 $PQRS$ 的周长 AA_2 。因此， $PQRS$ 有最小周长。

注意，如果 E, F, G 是 YY_3 上面 YY_3 分别与 AB, BC_1, C_1D_2 相交的点，那末 E, F, G 就对应于 $ABCD$ （除 AD 边）的另三边上的点，因此 Y ，

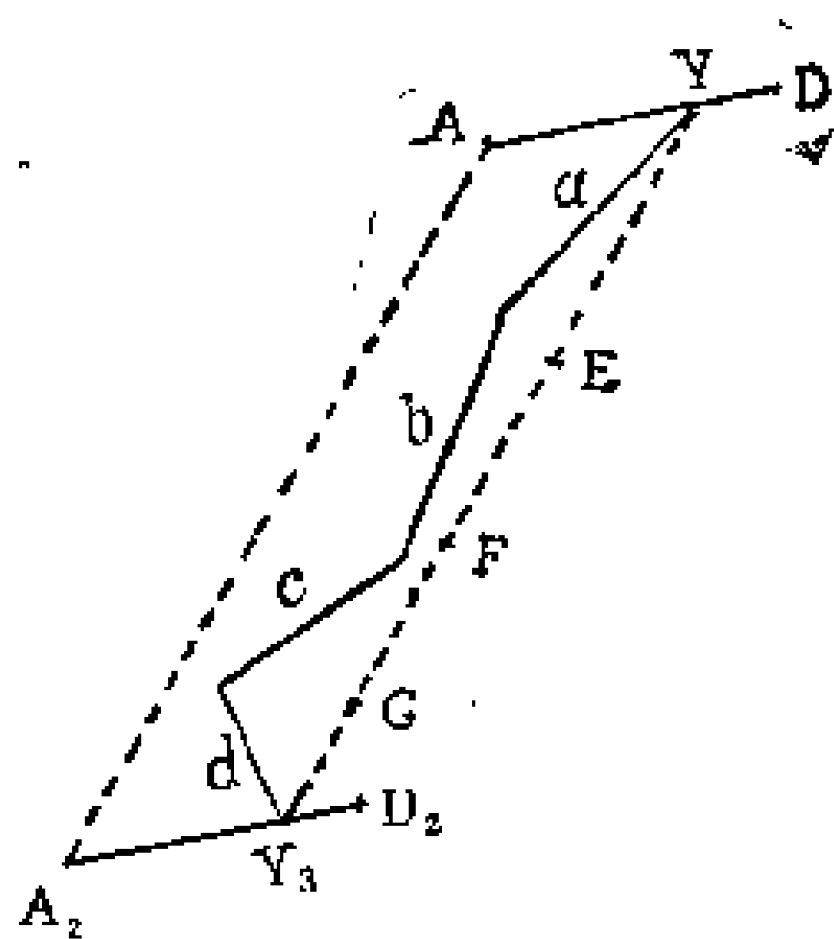


图 69

E, F, G 确定一个内接四边形 T . 展开 T 就得到 YY_3 , 即 T 的拉直的周长 . 所以从 AD 上任一点 Y 出发均可作 $ABCD$ 的周长最小的内接四边形 .

五十六、三角形数

下面的三角形阵列中的圆盘个数确定一个三角形数的序列（图70），其开始各项为1，3，6，10，15，21，28，36，45，…，第n项是

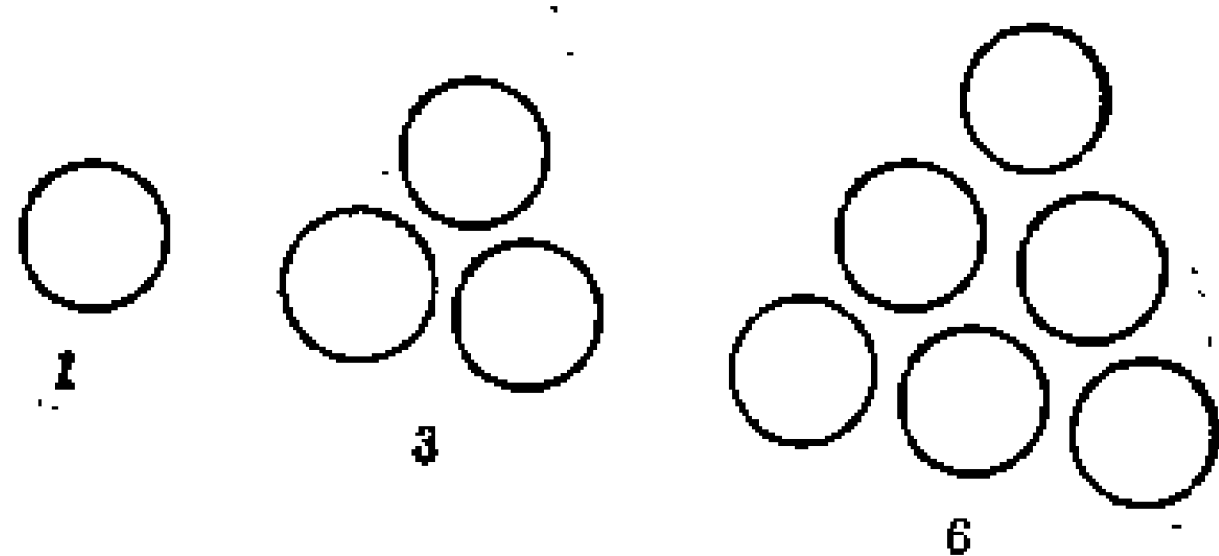


图 70

$$t_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

由于 $t_n=t_{n-1}+n$ ，最初十多项很容易心算出来：

1. (加2)3， (加3)6， (加4)10， (加5)15，
 (加6)21， 28， 36， 45， 55， 66， 78， 91，
 105， 120， 136， 153， …下面考虑七个关于三角形数的小问题。

(i) [AMM， 1935—36， p， 313， 问题115， 俄亥俄州诺伍德城的G.W. 维斯哈德 (We-

ishard) 提问并解答, ①

试证明: 任何奇数平方在八进制中末位都是 1, 若将 1 划去, 则剩下部分恒为三角形数.

解答 注意, 相邻二数 n 与 $n+1$ 中必有一数为偶数, 我们有

$$\begin{aligned}(2n+1)^2 &= 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n+1) + 1 \\ &= 8k + 1,\end{aligned}$$

式中 k 为整数. 因此在八进制中, 奇数平方的尾数为 1.

把数 m 在八进制中的末位 1 划去, 剩下 $\frac{(m-1)}{8}$.

因此按所说办法划去 1 后有

$$\frac{(2n+1)^2-1}{8} = \frac{4n(n+1)}{8} = \frac{n(n+1)}{2} = t_n,$$

即第 n 个三角形数.

(ii) [AMM, 1932, p. 179, 问题 3480, 俄亥俄州诺伍德城 G. W. 维斯哈德提出, 威尔斯利学院海伦·A·美利尔 (Merrill) 解答.]

试证明: 以 9 为基的数系中, 每个全由 1 组成的数都是三角形数:

$$1, 11, 111, \dots$$

①AMM为美国数学月刊——译注

解答 第一个数1，显然是三角形数，如果将1附在用基9表示的数 k 的末尾，便得数 $9k+1$ 。设 k 正好是个三角形数， $k=n(n+1)/2$ ，那末

$$\begin{aligned} 9 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 1 &= \frac{9n^2 + 9n + 2}{2} \\ &= \frac{(3n+1)(3n+2)}{2}, \end{aligned}$$

又是一个三角形数。由归纳法便得出要证的结论。

我们注意，把01附在以3为基表示的数 k 后也得到 $9k+1$ ，因此把01附到以3为基的三角形数后也产生出另一个三角形数。

以25为基时，把数字3附在三角形数 $n(n+1)/2$ 的末尾得

$$\begin{aligned} 25 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 3 &= \frac{25n^2 + 25n + 6}{2} \\ &= \frac{(5n+2)(5n+3)}{2}, \end{aligned}$$

这是三角形数。因而以25为基时，三角形数末位放3，或者完全等价地在以5为基时，三角形数末二位放03，都得出新的三角形数。

一般地，如果以 $(2k+1)^2$ 为基时三角形数后附上一位数 $\frac{1}{2}k(k+1)$ ；或者以 $2k+1$ ($k \leq 3$)为基时三角形数后附两位数0与 $\frac{1}{2}k(k+1)$ ；或者以 $2k+$

1($k > 3$)为基时附上代表 $\frac{1}{2}k(k+1)$ 的两位数, 结果都得到三角形数.

(iii) [AMM, 1963, p.211, 问题 E1516, 加利福尼亚大学R. J. 鄂贝格 (Oberberg) 提出, 坦普尔大学J. E. 依格 (Yeager) 解答.]

用三角形数的最末一位数组成 $N=0.1360518\dots$, 问 N 是有理数还是无理数?

解答 三角形数写出来是

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66,
78, 91, 105, 120, 136, 153, 171, 190, 210,
231, 253, 276, 300, 325, 351, \dots .

因此 N 写出来就是

$N=0.13605186556816063100136051\dots$,

看来有20位循环. 仍然把第 n 个三角形数记成 t_n , 我们有通式

$$\begin{aligned} t_{n+20} - t_n &= \frac{(n+20)(n+21)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2}(n^2 + 41n + 420 - n^2 - n) \\ &= 10(2n + 21), \text{ 尾数是 } 0. \end{aligned}$$

因此 t_{n+20} 与 t_n 的末位数字一定是相同的, 这就肯定了 N 是循环小数, 从而 N 是有理数.

注意, N 简直象个迴文, 倒读 正读都一样 事实上,

$$\frac{N}{10} = 0.013605186556815063100136051\cdots$$

$\longleftarrow \quad \longrightarrow$

是迴文式的循环小数.

可以证明: 由三角形数的末 k 位数字, $k=1, 2, 3, \cdots$ 可以得到一个有理数 N . 三角形数是算术级数 $1+2+3+\cdots$ 的部分和. 不难证明, 由自然数的任意算术级数的部分和的末 k 位数字构成的数 N 是有理数.

(iv) (AMM, 1962, p.168, 问题E1473, 哥伦比亚大学J.L.皮腾波尔 (Pietenpol) 提出, 加利佛尼亚州科隆纳城美国海军军械实验所A.V.西尔维斯特 (Sylwester) 解答.)

我们看到三角形数 1 与 36 都是完全平方数. 试证明有无穷多个三角形数也都是完全平方.

解答 上面的论断来自一个深刻的观察, 即只要 t_n 是完全平方, 那末 $t_{4n(n+1)}$ 必定也是完全平方:

$$\begin{aligned} \text{如果 } t_n = \frac{n(n+1)}{2} = k^2, \text{ 则 } 4n(n+1) \\ = 8k^2, \end{aligned}$$

于是

$$t_{4n(n+1)} = t_{8k^2} = \frac{8k^2(8k^2+1)}{2} = 4k^2(8k^2+1)$$

$$\begin{aligned}
&= 4k^2 [4n(n+1) + 1] \\
&= 4k^2 (4n^2 + 4n + 1) \\
&= 4k^2 (2n+1)^2, \text{ 完全平方.}
\end{aligned}$$

(v) [AMM, 1933, p. 362, 问题E21, 旧金山V. F. 伊凡诺夫 (Ivanoff) 提出, 底特律大学L. S. 庄士敦 (Johnston) 解答.]

试证明: 相邻两个三角形数之平方差必为完全立方数:

$$\begin{aligned}
\{t_n\}: & 1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots, \\
\{t_n^2\}: & 1, 9, 36, 100, 225, 441, \dots, \\
\{\text{差}\}: & 8, 27, 64, 125, 216, \dots.
\end{aligned}$$

解答 大家都知道前 n 个自然数的立方和是

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 = t_n^2.$$

因此 $t_{n+1}^2 - t_n^2 = (n+1)^3$, 即完全立方.

(vi) [Pi Mu Epsilon, 卷2, 1954—59, p. 378, 问题92, 洛杉矶城列昂·班科夫 (Bankoff) 提出, 卡内基工学院托马斯·包尔洵 (Porsching) 解答.]

试证明三角形数的倒数和为2:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots = 2.$$

解答 由两条双曲线

$$y_1(x) = \frac{1}{x}, \quad y_2(x) = \frac{1}{x-1}$$

可以得到一个十分优美的几何解 (图71) .

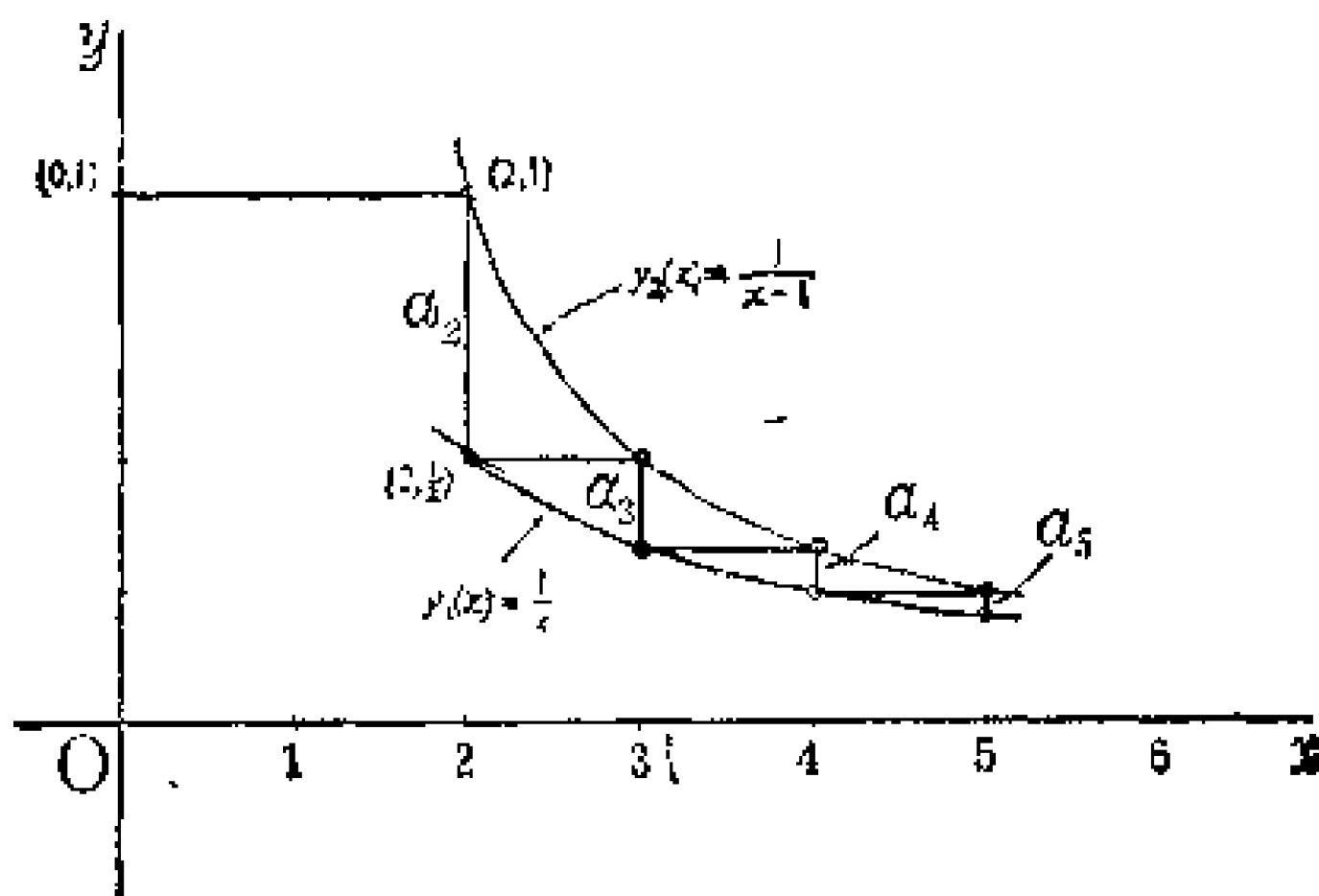


图 71

当 x 为整数, $n \geq 2$ 时, 两曲线纵坐标之差 a_n 为

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n(n-1)} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

因此 $\frac{1}{2n} = 2a_n$, 问题中的和就是

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots = 2(a_2 + a_3 + \cdots) .$$

但 $x=n$ 时的 $y_2(x)$ 值与 $x=n-1$ 时的 $y_1(x)$ 值相等, 所以 a_n 在 y 轴上的投影首尾相接组成从点 $(0, 1)$ 到原点的直线段. 由于两条双曲线的渐近

线都是正 x 轴，因而全部投影完全充满上述单位线段，故

$$a_2 + a_3 + a_4 + \cdots = 1,$$

由此立刻得出要证的结论。

除了上面的几何解法外，还有下面的优美代数解法：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \cdots \\ &= \frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{2}{4 \cdot 5} + \cdots \\ &= 2 \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots \right) \\ &= 2 \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{4} \right) + \cdots \right] \\ &= 2. \end{aligned}$$

(vii) [AMM, 1968, p.410, 问题E1943, 印度巴罗达J.M.哈特里 (Khatri) 提出，富兰克林马歇尔学院贝纳德·杰柯布森 (Jacobson) 解答.]

我们最后的问题是想知道，是否能选出三角形数的一个无穷序列，从它开头算起的任意多项之和也是一个三角形数。

解答 设已经作成了这样的序列的一部分，而

且除了要求应有的性质外还多一条特别性质：在这部分序列中加到任意项 t_k 的和是 t_{k+1} 。那末，并入项 $t_{t_{k+1}-1}$ 就延伸了序列，同时保留了序列的重要特性。因为 $t_n + (n + 1) = t_{n+1}$ ，所以当 $n = t_{k+1} - 1$ 时，

$$\text{新和} = t_{t_{k+1}-1} + t_{k+1} = t_{t_{k+1}}.$$

$t_3, t_5, t_{20}, t_{230}$ 加入了这种序列，此序列之部分和为 $t_4, t_6, t_{21}, t_{231}$ 。实际上，从第2项以后的任何三角形数开始，应用这条并入规则，就能产生出具有所需特性的无穷序列。

最后我们指出，还可以选得出三角形数的无穷序列，其部分和都是完全平方数，例如序列 $t_1, t_2, t_6, t_{18}, \dots, t_{2 \cdot 3^k}, \dots$ 的部分和

$$t_1 + t_2 + t_6 + \dots + t_{2 \cdot 3^k} = \left(\frac{3^{k+1} + 1}{2} \right)^2.$$

正n边形

与其它各顶点相联. 如果 O 在某一条对角线 $A_1 A_i$ 上, 我们立刻知道 $\angle A_1 O A_i = \pi$. 今设 O 位于相邻两对角线 $A_1 A_i$ 与 $A_1 A_{i+1}$ 之间, 并把三角形 $A_1 O A_i$ 与 $A_1 O A_{i+1}$ 的内角分别用 m, x, z, n, y, t 表示 (图72). 因为 $A_1 O \leq O A_i$, 所以 $z \leq m$, 同样由 $A_1 O \leq O A_{i+1}$ 知 $t \leq n$. 因此 $z + t \leq m + n$. 但正 n 边形是圆内接多边形, 若用 C 表示它的外接圆圆心, 则联接相邻两顶点的弧 $A_i A_{i+1}$ 在圆心 C 所对的角是 $2\pi/n$. 从而弧 $A_i A_{i+1}$ 所对圆周角只有一半大, 即 $m + n = \pi/n$. 因之 $z + t \leq \pi/n$.

然而两个三角形中的六个角加起来等于 2π :

$$(m + n) + (z + t) + x + y = 2\pi,$$

$$\frac{\pi}{n} (z + t) + x + y = 2\pi.$$

由于 $z + t \leq \pi/n$, 所以有

$$\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n} + x + y \geq 2\pi,$$

即

$$x + y \geq 2\left(\pi - \frac{\pi}{n}\right).$$

所以 x 和 y 不能都小于 $\pi - (\pi/n)$ (免得其和太小), 于是得证结论.

五十八、费马数

形如

$$F_n = 2(2^n) + 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

的数叫费马数，得名于法国伟大的数学家皮埃尔·费马 (Fermat) (1601—1665)。费马数序列的前几项是3, 5, 17, 257, 65537, …。费马数满足递推关系 $F_n = F_0 F_1 \cdots F_{n-1} + 2$ 。此式很容易用归纳法证明。不过下面的证法更干净利落。方法见于AMM, 1935, p.569, 问题E152, 是康涅狄格州哈特福德联大 J. 罗森包姆 (Rosenbaum) 提出, 纽约布鲁克林的丹涅尔·芬克尔 (Finkel) 解答的。

注意 $2(2^0) + 1$ 就是 1，于是

$$\begin{aligned} 1 \cdot F_0 F_1 \cdots F_{n-1} &= 2(2^0) + 1][2(2^1) + 1] \\ &\quad [2(2^2) + 1] \cdots [2(2^{n-1}) + 1] \\ &= [1(2^0) + 1][2 \cdot 2^1 + 1] \\ &\quad [2(2^2) + 1] \cdots [2(2^{n-1}) + 1] \\ &= [2^{1 \cdot 2^2} + 1][2^{2 \cdot 2^2} + 1] \cdots \\ &\quad [2(2^{n-1}) + 1] \\ &= \dots \end{aligned}$$

$$= [2(2^{n-1}) - 1][2(2^{n-1}) + 1]$$

$$2(2^{n-1}) - 1 = F_n - 2.$$

根据这个关系式要证明每对费马数都是互素的，就是很简单的事情了。如果 $m < n$ ，则

$$F_n = F_0 F_1 \cdots F_m \cdots F_{n-1} + 2.$$

所以 F_m 与 F_n 的任意公约数也必除尽 2。于是这样的公约数只能是 1 或 2。然而它又不能是 2，因为费马数都是奇数，所以它必然是 1，这就使得 F_m 与 F_n 互素。

由于每个 $F_n > 1$ ，所以每个费马数都有一个素因子，此因子不能整除别的费马数。而费马数有无穷多，这也就从另一个角度证明了素数有无穷多个。

我们所得的结果可以用来解决下面的问题：

证明 $2(2^n) - 1$ 至少可以被 n 个不同的素数所整除。

[AMM, 1968, p.1016, 问题E 2014, 纽约市布朗克斯社区大学的厄文·鞠斯特 (Just) 与诺曼·绍姆贝格 (Schaumberger) 提出.]

解答

$$\begin{aligned} 2(2^n) - 1 &= [2(2^n) + 1] - 2 = F_n - 2 \\ &= F_0 F_1 \cdots F_{n-1}. \end{aligned}$$

这是 n 个不同的费马数的积，它必然至少有 n 个不

同的素因子，因为费马数是互素的。

借讨论费马数的机会，我们来证明几个简易结果：费马数中无平方数，无立方数，而且除 $F_0=3$ 外，无三角形数。

(i) F_n 不是平方数。

显然

$$(F_n - 1)^2 = [2(2^{2^n})]^2 = 2(2^{2^{n+1}}) = F_{n+1} - 1.$$

所以

$$F_{n+1} = 1 + (F_n - 1)^2.$$

因此，如果有 $F_n \equiv 2 \pmod{3}$ ，那也就有 $F_{n+1} \equiv 2 \pmod{3}$ ，但事实上有 $F_1 = 5 \equiv 2 \pmod{3}$ ，这就表明 $n > 0$ 时，一切 $F_n \equiv 2 \pmod{3}$ ，然而从来不会有平方数与 $2 \pmod{3}$ 同余（因为 $n \equiv 0, 1$ 或 $-1 \pmod{3}$ ，我们有 $n^2 \equiv 0, 1$ 或 $1 \pmod{3}$ ）。由于 $F_0 = 3$ 不是平方数，所以没有一个 F_n 是平方数。

(ii) F_n 不是立方数。

容易看出立方数同余于 $0, 1$ ，或 $-1 \pmod{7}$ ：

$$n \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

$$n^2 \equiv 0, 1, 4, 2, 2, 4, 1,$$

$$n^3 \equiv 0, 1, 1, -1, 1, -1, -1.$$

费马数来说，有 $F_0 = 3$ ， $F_1 = 5$ 。由

$$F_{n+1} = 1 + (F_n - 1)^2$$

可知

如果 $F_n \equiv 3 \pmod{7}$ ，则 $F_{n+1} \equiv 5 \pmod{7}$ ，

如果 $F_n \equiv 5 \pmod{7}$, 则 $F_{n+1} \equiv 3 \pmod{7}$. 所以, 以 7 为模时, 费马数交替地与 3 和 5 同余, 但绝不与 0, 1, 或 -1 同余. 因此费马数中无立方.

(iii) 没有一个 $F_n > 3$ 是三角形数.

第 n 个三角形数是 $t_n = n(n+1)/2$, 从而 $2t_n = n(n+1)$. 今有 $n \equiv 0, 1, 2 \pmod{3}$. 如果 $n \equiv 0$, 或 $2 \pmod{3}$, 则 n 与 $n+1$ 中之一可被 3 除尽, 从而 $t_n \equiv 0 \pmod{3}$. 另一方面, 如果 $n \equiv 1 \pmod{3}$, 则有 $2t_n \equiv n(n+1) \equiv 2 \pmod{3}$, 这只有 $t_n \equiv 1 \pmod{3}$. 所以无论怎样我们都有 $t_n \equiv 0$ 或 $1 \pmod{3}$, 而这点前面我们已经看出对 > 3 的费马数是不成立的. 由是得证结论.

五十九、一个倒数 不等式

对自然数 $n > 1$, 证明

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > 1 .$$

解答

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\ & > \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right) \\ & = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} (n^2 - n) \\ & = \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n} \\ & = 1 . \end{aligned}$$

六十、完全 四次方

证明相邻 8 个自然数之积不是完全四次方。

解答 令 x 表示 8 个相邻自然数中最小的一个，则它们的积 P 可以写成

$$\begin{aligned} P &= [x(x+7)][(x+1)(x+6)] \\ &\quad \cdot [(x+2)(x+5)][(x+3)(x+4)] \\ &= (x^2+7x)(x^2+7x+6)(x^2+7x+10) \\ &\quad \cdot (x^2+7x+12). \end{aligned}$$

令 $x^2+7x+6=a$ ，则

$$\begin{aligned} P &= (a-6)(a)(a+1)(a+6) \\ &= (a^2-36)(a^2+7a) \\ &= a^4+7a^3-36a^2-252a \\ &= a^4+4a(a^2-11a-36) \\ &= a^4+4a(a+3)(a-12). \end{aligned}$$

因为 $a=x^2+7x+6$ ，且 $x \geq 1$ ，故 $a \geq 14$ ， $a-12$ 为正。因此

$$P > a^4.$$

然而 $P=a^4+4a^3-36a^2-144a$ 表明 P 小于 $(a+1)^4=a^4+4a^3+6a^2+4a+1$ 。因而

$$a^4 < P < (a+1)^4,$$

这说明 P 始终在相邻两个四次方数之间，而绝不与其中任何一个相等。

六十一、装方块

因为调和级数是发散的，所以如果把边长为 $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots$ 的一组正方形并排挨着放在它们共同的基线 L 上，就会无穷无尽地延伸下去（图73）。但下面要证明除第一个方块外的全部方块都可以装进第一个方块而不会互相重叠。

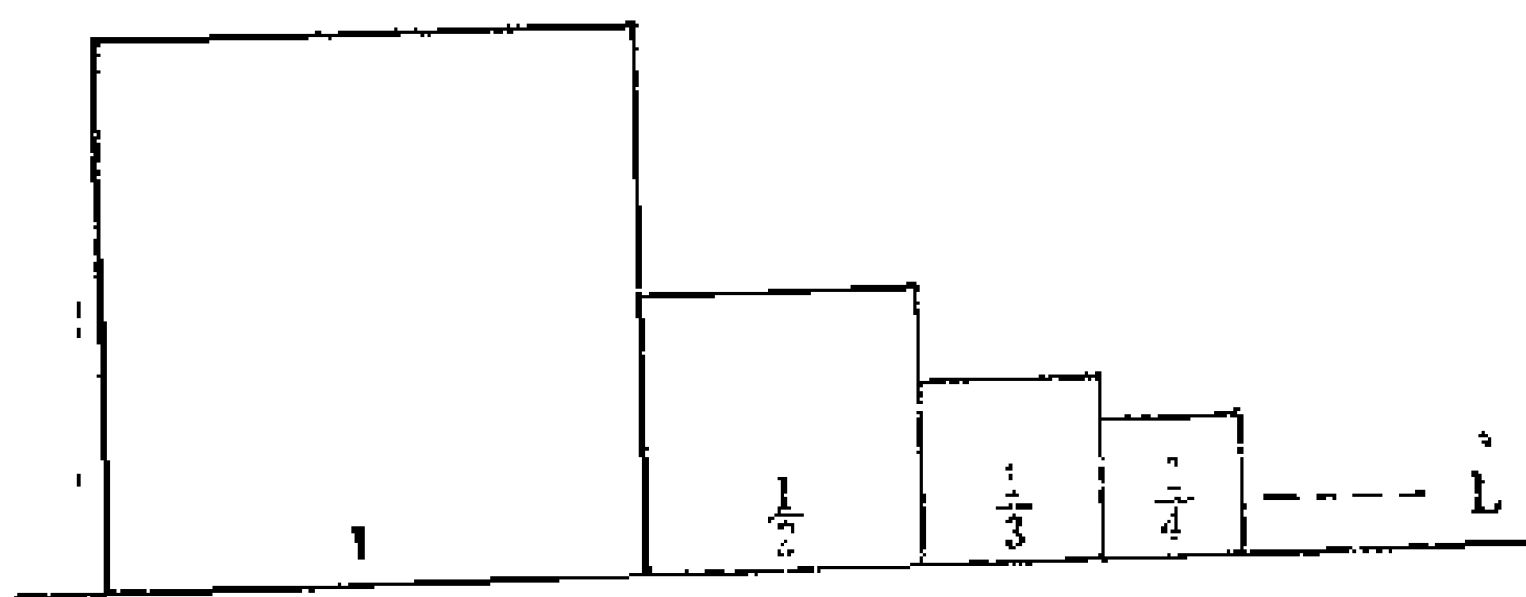


图 73

解答 沿着 L 把正方形分成组，每组以分母为 2 的方次的方块开头： $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7})$, \dots 。第 n 组的正方形的边长之和是

$$\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}-1} < \underbrace{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n}}_{2^n \text{ 个}} = 1。$$

因此第 n 组的正方形可以全部放进宽为1高为 $\frac{1}{2^n}$ 的矩形中，把包含正方形组的这些矩形一个挨一个地垒起来就得到一个矩形块，其宽为1，高为

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 1 \quad (\text{图74})$$

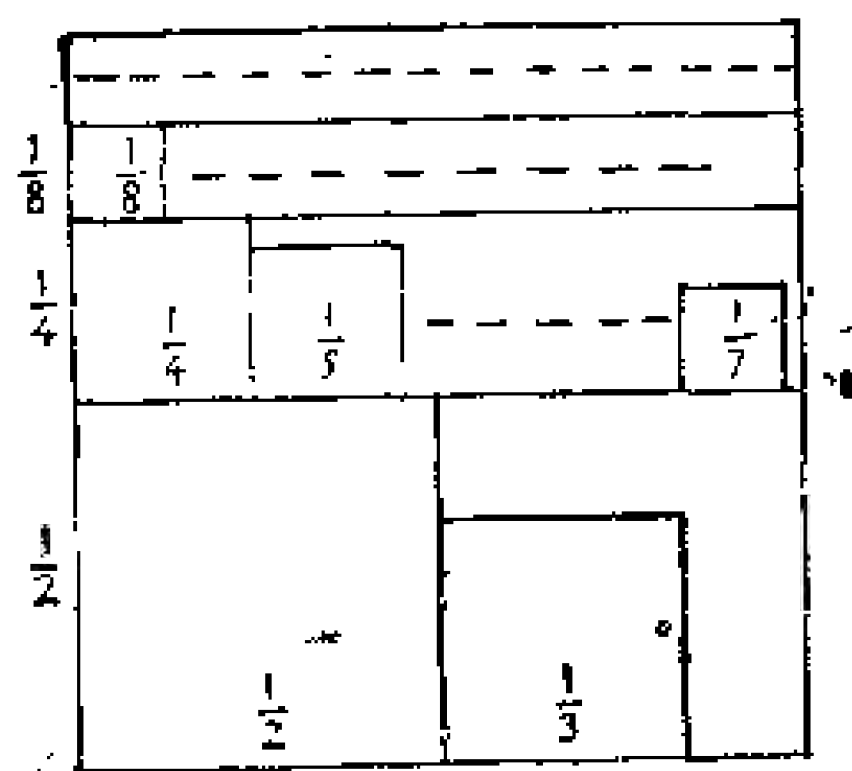


图 74

这种装法就把第一个以外的全部正方形装入了单位正方形中。

本节中我们主要关心的是下面的这个问题：

考虑一组正方形，个数有限或无限，但总面积为1。试证明无论这些正方形边长是多少，它们都可以装进一个边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形 S 中。

〔AMM, 1969, p.88, 问题E2041, 叶什瓦大学（犹太尊经书院）D.J. 纽曼（Newman）提出并解答.〕

解答 因为面积为 $\frac{1}{2}$ 的正方形的边长是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，
 所以任何边长小于 $\sqrt{2}$ 的正方形中都放不下面积为 $\frac{1}{2}$ 的两个正方形。因此能装下题中所说正方形组的
 “万能”正方框的边长至少必须为 $\sqrt{2}$ (图75)

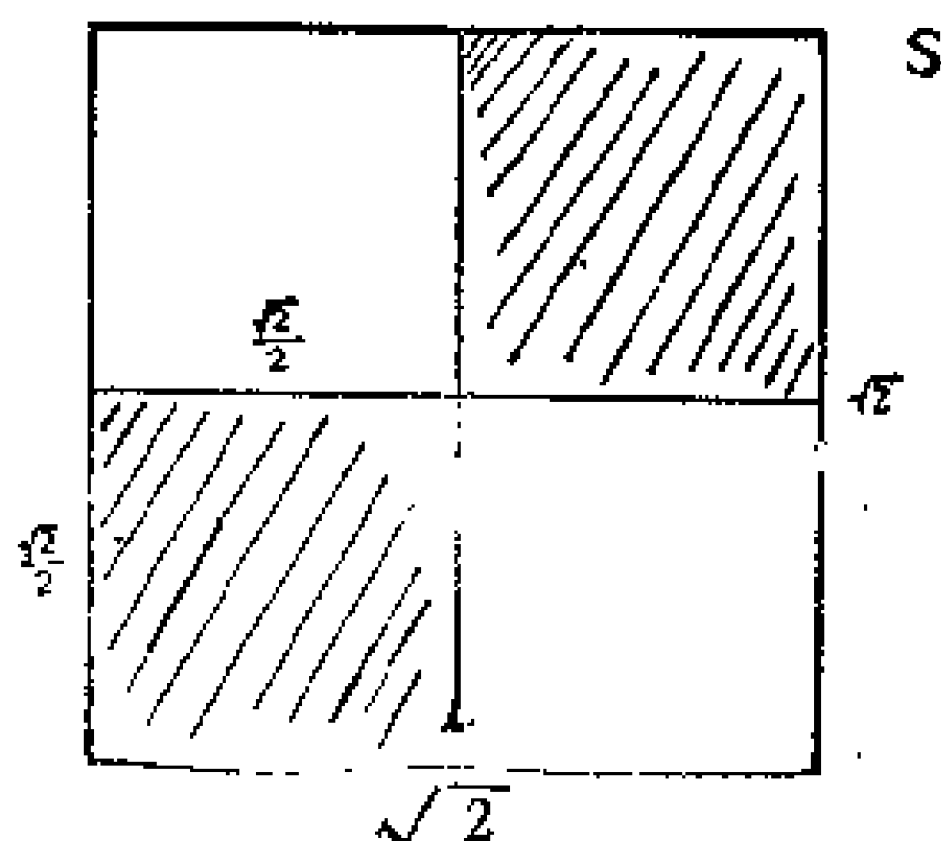


图 75

把已知的一组正方形按不增顺序排列，边长表示成

$$s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq \cdots,$$

并且就干脆把边长为 s_i 的正方形称为正方形 s_i 。框架 S 的边或水平或铅直地放置。从左下角开始按递减顺序沿方框底边放置正方形 s_1, s_2, \cdots 直到放不下为止。把第一个也即最大一个正方形 s_1 的上边在 S 内延长，作为刚放好的一排正方形这一层的顶层 (图76)。又从左端开始在第一层层顶上放第二排，仍然按递减的顺序一个个地放入正方形，放满

为止。照样把本层第一个正方形的顶线向右延长作为本层的顶部。象这样一排一排地放，我们将会发现整个正方形组都可以放进正方形 S 中。

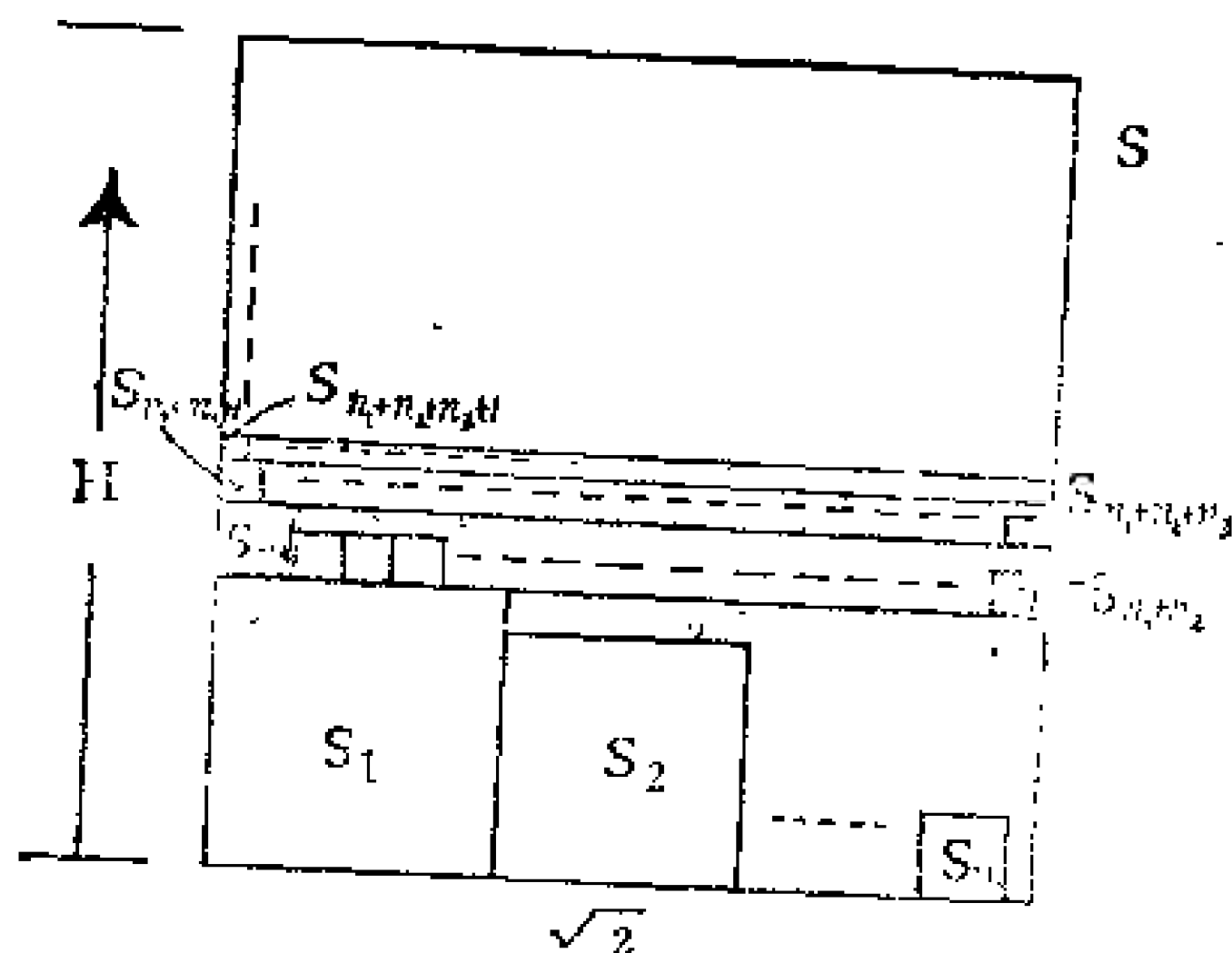


图 76

设第 r 排的正方形个数是 n_r ，则各排的正方形个数分别为：

第 1 排有正方形 s_1, s_2, \dots, s_{n_1} ；

第 2 排有正方形 $s_{n_1+1}, s_{n_1+2}, \dots, s_{n_1+n_2}$ ；

第 3 排有正方形 $s_{n_1+n_2+1}, s_{n_1+n_2+2}, \dots, s_{n_1+n_2+n_3}$ ；
.....

我们证明按这种装法不会装出 S 的顶部以外去，这意味着 S 能装下全部正方形，为此我们来证明，在 S 左边量得各排垒成的总高度 H 不会超过 $\sqrt{2}$ ：

$$H = s_1 + s_{n_1+1} + s_{n_1+n_2+1} + \cdots \leq \sqrt{2}.$$

因全部正方形总面积为 1，故

$$1 \geq s_1 \geq s_2 \geq \cdots,$$

这表明 S 确能容纳第一排。如果一排就够了，问题就解决了。因之我们来考虑不止需要一排的一般情况。当然我们还是需要用总面积为 1 这个条件，先推导 n 个关于 s_i^2 的关系式。

由于第二排第一个正方形是因为太大了第一排末尾放不下才放到第二排开头的，所以

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_{n_1} + s_{n_1+1} > \sqrt{2},$$

故

$$s_2 + \cdots + s_{n_1+1} > \sqrt{2} - s_1.$$

乘以 s_{n_1+1} 得

$$\begin{aligned} s_2 \cdot s_{n_1+1} + s_3 \cdot s_{n_1+1} + \cdots + s_{n_1+1} \cdot s_{n_1+1} &> \\ (\sqrt{2} - s_1) s_{n_1+1}. \end{aligned}$$

而 $s_2 \geq s_3 \geq s_4 \geq \cdots \geq s_{n_1+1}$ ，故

$$\begin{aligned} s_2^2 + s_3^2 + \cdots + s_{n_1+1}^2 &= s_2 \cdot s_2 + s_3 \cdot s_3 + \cdots + s_{n_1+1} \cdot s_{n_1+1} \\ &\geq s_2 \cdot s_{n_1+1} + s_3 \cdot s_{n_1+1} + \cdots + s_{n_1+1} \cdot s_{n_1+1} \\ &\geq (\sqrt{2} - s_1) s_{n_1+1}, \end{aligned}$$

即

$$\boxed{s_2^2 + s_3^2 + \cdots + s_{n_1+1}^2 > (\sqrt{2} - s_1) s_{n_1+1}}$$

对于第二排我们同样也有

$$s_{n1+1} + s_{n1+2} + \cdots + s_{n1+n2} + s_{n1+n2+1} > \sqrt{2},$$

故

$$s_{n1+2} + \cdots + s_{n1+n2} + s_{n1+n2+1} > \sqrt{2} - s_{n1+1}.$$

乘以 $s_{n1+n2+1}$ 并注意到 $s_{n1+2} \geq \cdots \geq s_{n1+n2+1}$, 完全象第一排的情况那样得到

$$s^2_{n1+2} + s^2_{n1+3} + \cdots + s^2_{n1+n2+1} (\sqrt{2} - s_{n1+1}) \\ s_{n1+n2+1}.$$

因为 $s_1 \geq s_{n1+1}$, 由此得

$$\boxed{s^2_{n1+3} + \cdots + s^2_{n1+n2+1} > (\sqrt{2} - s_1) s_{n1+n2+1}}.$$

对于第三排也同样可得

$$\boxed{\begin{aligned} & s^2_{n1+n2+2} + s^2_{n1+n2+3} + \cdots + s^2_{n1+n2+n3+1} \\ & > (\sqrt{2} - s_1) s_{n1+n2+n3+1} \end{aligned}}$$

如此一直下去, 对所有的排都求得类似的不等式. 把这些不等式相加得

$$s^2_2 + s^2_3 + \cdots > (\sqrt{2} - s_1) (s_{n1+1} + s_{n1+n2+1} \\ + \cdots).$$

因为总面积是 1, 又右端第二个因子就是 $H - s_1$, 所以

$$1 - s^2_1 > (\sqrt{2} - s_1) (H - s_1),$$

$$H - s_1 < \frac{1 - s^2_1}{\sqrt{2} - s_1},$$

故

$$H < \frac{1 - \bar{s}_1^2}{\sqrt{2} - s_1} + \bar{s}_1.$$

很容易用化简的办法证明

$$\sqrt{2} - \frac{(1 - \sqrt{2}s_1)^2}{\sqrt{2} - s_1} = \frac{1 - s_1^2}{\sqrt{2} - s_1} + \bar{s}_1.$$

所以

$$H < \sqrt{2} - \frac{(1 - \sqrt{2}s_1)^2}{\sqrt{2} - s_1} \leq \sqrt{2}.$$

即得需要的不等式 $H < \sqrt{2}$.

六十二、红球 与绿球

袋中有6个红球与8个绿球。任意抓出5个球放进一个红盒子中，其余9个球放进一个绿盒中。红盒中绿球个数加绿盒中红球个数之和不是素数的概率有多大？

解答 用 g 表示红盒中绿球的个数。总共有6个红球8个绿球，因此色球在盒中的分布情况一定如图77所示。于是绿盒中的红球个数加上红盒中的绿球个数 $= (g + 1) + g = 2g + 1$ ，这是奇数。但是 g 不会超过红盒中球的总数5，故 $1 \leq 2g + 1 \leq 11$ 。

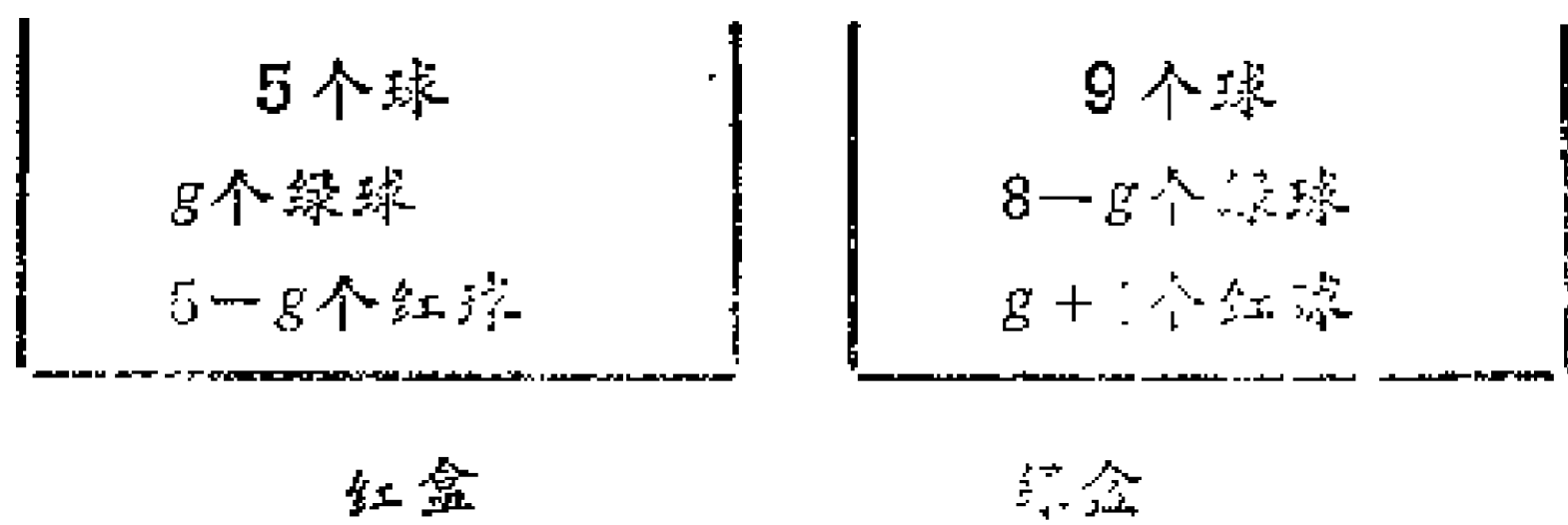


图 77

在这个范围内的奇复合数只有9。不过我们也得把1包括进去，因为它既不是素数也不是复合数。要取非素数值， $2g + 1$ 就必须等于1或9。因此 g 必

须等于0或4. $g=0$ 或4时, 抓球的概率是

$$\frac{(\text{5个红球全抓的抓法数}) + (\text{4绿1红的抓法数})}{\text{抓的总次数}}$$

$$= \frac{C_6^5 + C_8^4 C_6^1}{C_{14}^5} = \frac{6 + 420}{2002} = \frac{213}{1001}.$$

六十三、算术级数中的 复合数项

155页问题五十四说的是在自然数序列中有任意长的许多段相邻复合数。我们在这一问题中要证明有任意长的算术级数，其各项均为复合数且两两互素。

解答 我们证明，对任何自然数 $n > 1$ ，在算术级数中存在两两互素的 n 个复合数。

任选一个比指定的 n 大的素数 p ，然后选一个尽量大的数 $p + (n-1)n!$ ，并选整数 N 使得

$$N > p + (n-1)n! .$$

于是我们可以断言，下面的 n 个数(可能是很大的)

$$N! + p, N! + p + n!, N! + p + 2 \cdot n!, \dots, N! + p + (n-1)n!$$

就满足所需条件。显然这些数都在公差为 $n!$ 的算术级数中。因为选取的 N 使得 $N > p + (n-1)n!$ 。所以对 $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ，就有 $p + i \cdot n! < N$ ，这表明 $(p + i \cdot n!)$ 这个数是 $N!$ 的一个因子。所以 $N! + p + i \cdot n!$ $i = 0, 1, \dots, n-1$ ，可以被较小的数 $p + i \cdot n!$ (这个数大于1)除尽，因而是个复合数。

又设有两项

$$N! + p + i \cdot n! \text{ 与 } N! + p + j \cdot n! , \quad i > j,$$

有公共素因子 q , 则 q 能除尽其差 $(i-j) \cdot n!$. 但 $i-j < n$, 故 $(i-j) \cdot n!$ 的每个素因子都 $\leq n$, 于是 $q \leq n$, 从而 $q \mid n!$. 但 $N > n$, 因而 q 整除大数目 $N!$. 因 q 能除尽 $N! + p + i \cdot n!$, 所以也必能除尽 p , 但这是不可能的, 因为 p 与 q 都是素数, 并且 $q \leq n < p$. 问题得证.

六十四、把等边三角形 联结起来

边长为 $1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots$ 的等边三角形沿着一条直线首尾相接地放成一条线（图78）。试证明不在直线上的各顶点都在一条抛物线上，并且它们的焦半径都是整数。

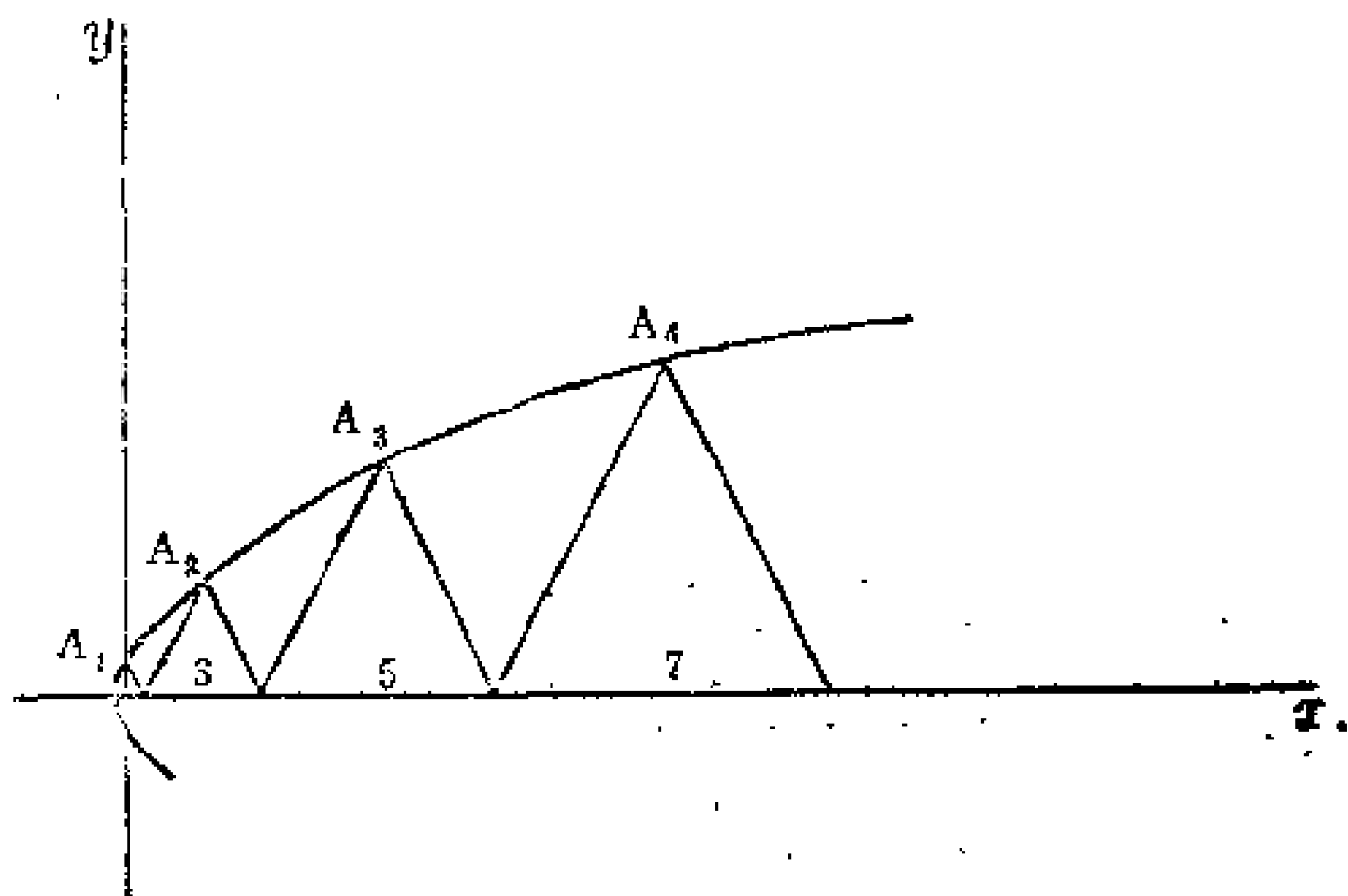


图 78

解答 把各顶点依次表示成 A_1, A_2, \dots ，选已知直线作 x 轴，并让 y 轴通过 A_1 。于是 A_1 的坐标为 $(0, \sqrt{3}/2)$ 。第 n 个三角形的底边等于 $2n-1$ ，故 A_n 的横坐标为

$x = \frac{1}{2} + 3 + 5 + \cdots + (2n-3) + \frac{1}{2}(2n-1)$,
 这可立刻化简为 $x = n(n-1)$. A_n 的纵坐标就是 A_1
 的纵坐标的 $2n-1$ 倍, 即

$$y = (2n-1) \frac{\sqrt{3}}{2}$$

由此得

$$n = \frac{1}{2} \left(\frac{2y}{\sqrt{3}} + 1 \right),$$

故 $n-1 = \frac{1}{2} \left(\frac{2y}{\sqrt{3}} - 1 \right)$.

所以

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \left(\frac{2y}{\sqrt{3}} + 1 \right) \frac{1}{2} \left(\frac{2y}{\sqrt{3}} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{4y^2}{3} - 1 \right), \end{aligned}$$

$$12x = 4y^2 - 3, \text{ 即 } 4y^2 = 12x + 3.$$

这是轴为横轴, 顶点为 $(-1/4, 0)$ 的抛物线方程.
 把坐标轴向负方向平移 $\frac{1}{4}$ 个单位, 即按

$$X = x + \frac{1}{4}, \quad Y = y$$

作坐标平移, 抛物线方程就化成

$$4Y^2 = 12 \left(X - \frac{1}{4} \right) + 3 = 12X, \text{ 即 } Y^2 = 3X.$$

我们立刻看出, 这时的抛物线顶点在坐标原点, 焦点在 $(3/4, 0)$. 所以回到原位, 抛物线的焦点一定是在 $(\frac{1}{2}, 0)$ (第一个三角形的一个顶点). 于

是 A_0 的焦半径由下式给出:

$$\sqrt{\left[n(n-1) - \frac{1}{2}\right]^2 + \left[(2n-1)\frac{\sqrt{3}}{2}\right]^2}$$

$$= n^2 - n + 1,$$

这是一个整数。

六十五、测验

甲、乙、丙三个同学在几项测验中比赛。在一项测验中得第一名时，打 x 分；得第二名打 y 分；得第三名打 z 分。这里 x, y, z 都是自然数并且 $x > y > z$ 。在每项测验中他们得分都不相同。甲总分为20分，乙为10分，丙为9分。学生甲在代数测验时是第二名，试问几何测验时谁是第二名？

解答 他们三人总共得到39分。因为 x, y, z 是不同的自然数，所以每项测验至少要打 $1+2+3=6$ 分。 $x+y+z$ 必能整除总分39。问题里明确提到的测验有两项，所以 $x+y+z \leq 39$ 。由于39除本身外的因子是1, 13，并且其因子 $x+y+z \geq 6$ ，所以必然有

$$x+y+z=13,$$

这说明共举行过三项测验。

由于甲在代数测验时是第二名，所以他的分数中有一次是 y 分。如果甲还有一次测验是得的 z 分，那末他在剩下那次只能是 x 分，于是总共得 $y+z+x=13$ 。然而事实上甲的总分是20分，因此他在各

项测验中不会得 z 分. 所以甲的分数构成情况或为 $3y$, 或为 $x+2y$, 或为 $2x+y$. 因3不能除尽10, 故不可能是 $3y$. 如果得分是 $x+2y$, 则

$$x+2y=x+y+y=20,$$

而
$$x+y+z=13,$$

两式相减得 $y-z=7$. 由于 $x>y>z$, 故 $y\geq 8$, $x\geq 9$, 因而 $x+y\geq 17$, 这与 $x+y+z=13$ 矛盾. 所以甲得分构成情况必然是 $2x+y=20$.

由此可知, y 必为偶数. 如果 $y\geq 6$, 那末 $x\geq 7$, 从而 $x+y\geq 13$, 这样就使 $x+y+z=13$ 中的 z 无容身之地了, 所以 y 只能是2或4.

若 $y=2$, 则更小的 z 必然等于1. 于是满足 $x+y+z=13$ 的 $x=10$. 然而这样一来甲的得分将是 $2x+y=22$ 而非20了. 所以 $y=4$, 由 $2x+y=20$ 得 $x=8$, 由 $x+y+z=13$ 得 $z=1$.

只有一种方式这几个数才能使三位学生各自的总分分别为20, 10, 19:

	(i)	(ii)	(iii)	总计
甲	8	8	4	20
乙	1	1	8	10
丙	4	4	1	9

因为甲不是第二名时丙就是第二名, 所以在几何测验时丙一定是第二名.

六十六、托勒密定理的一个应用

托勒密 (Ptolemy) 定理说, 圆内接四边形对角线长度的乘积等于两对对边边长乘积之和 (关于证明, 请参看任何一本综合几何教材). 用这条定理可立即证明下述结果:

令 $A_1A_2A_3$ 表示圆内接正三角形. 若 P 为圆周上任意一点, 证明 PA_1, PA_2, PA_3 中两段较短线段加起来等于第三条线段长.

证明 令 s 表示已知三角形的一边长. 如图 79, 由托勒密定理得

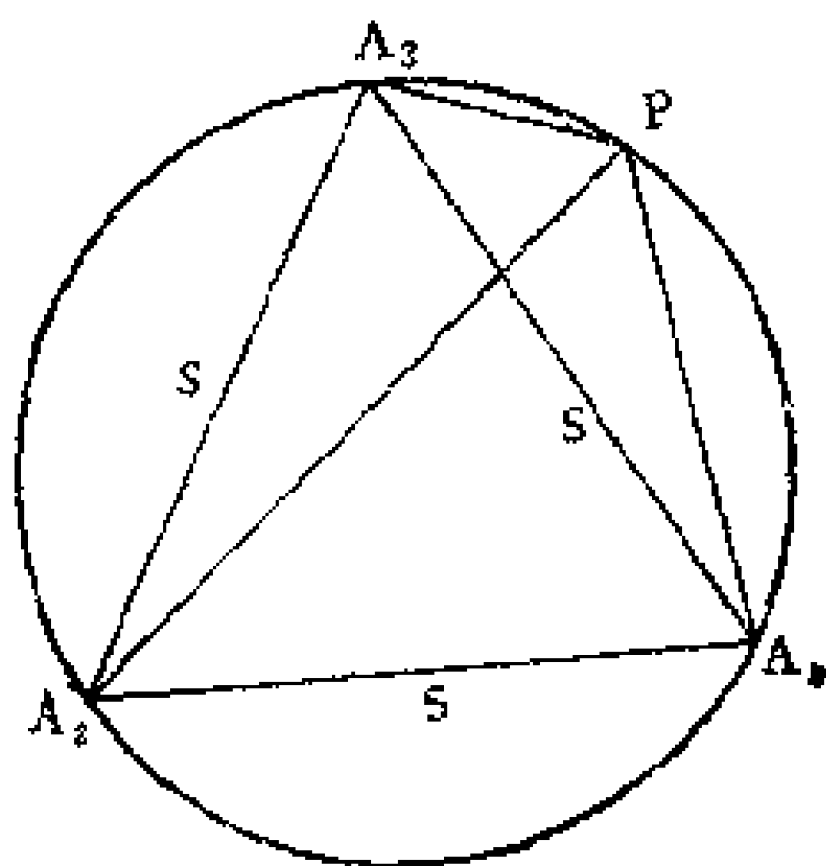


图 79

$$s \cdot PA_2 = s \cdot PA_1 + s \cdot PA_3,$$

于是

$$PA_2 = PA_1 + PA_3$$

本节中我们讨论上述命题的两则推广.

(i) [AMM, 1933, p. 501, 问题3583, 纽约H·格罗斯曼 (Grossman) 提出, 泊丢大学劳伦斯·赫得利 (Hadley) 解答.]

命 $A_0 A_1 \cdots A_{3n-1}$ 表示圆内接正 $3n$ 边形. 由圆周上任一点 P 到 $3n$ 个顶点作若干条弦 (图80).

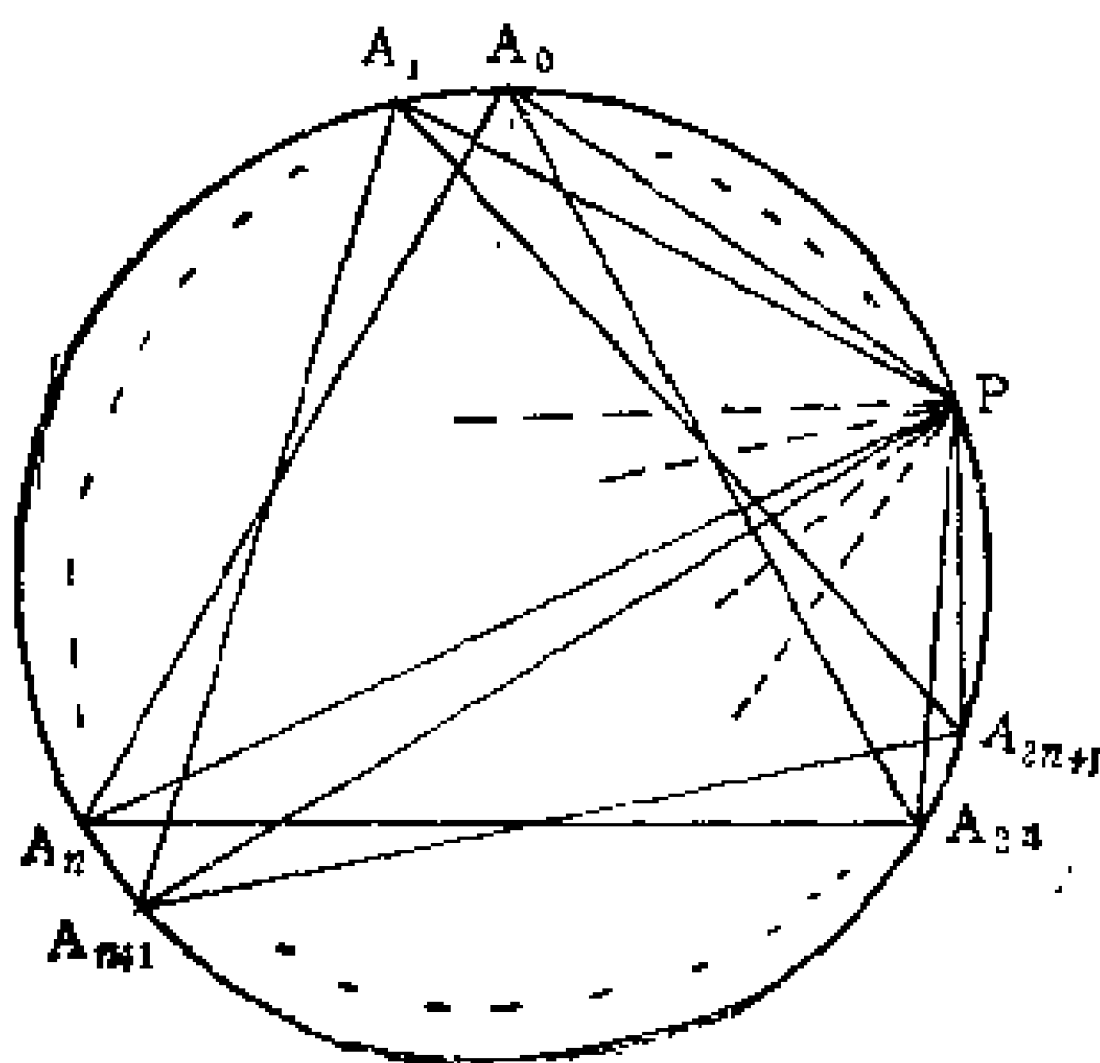


图 80

证明 n 条最长的弦的和等于其余 $2n$ 条短弦之和.

解答 取正 $3n$ 边形的三个顶点确定一个圆内接等边三角形, 总共得到 n 个等边三角形. 对于每个

三角形相应的（顶点与 P 联成的）三条弦来说，两条短弦弦长之和等于第三条弦弦长。可以看到，每组弦中的两条短弦弦长都 $\leq s$ （等边三角形边长），而长弦弦长都 $\geq s$ 。从每三条弦中取一条最长的弦，可得到 n 条长弦，余下 $2n$ 条短弦。引用前面的基本命题便可证明， n 条长弦弦长之和等于剩下的 $2n$ 条短弦弦长之和。

(ii) [下述结果的 $n=3$ 和 5 这两个特例是纽约大学威廉·威尔尼希 (Wernich) 得出的；而一般情形则是滑铁卢大学勒内·狄基 (Dickey) 得出的。]

设 $A_1A_2\cdots A_n$ 是正 n 边形， n 为奇数， P 为它的外接圆上的任一点。设字母符号如图 81 标出， P 就在弧 A_nA_1 上。令 $PA_i=a_i$ 。试证明：
当我们交替地加、减从 P 引出的线段，即：

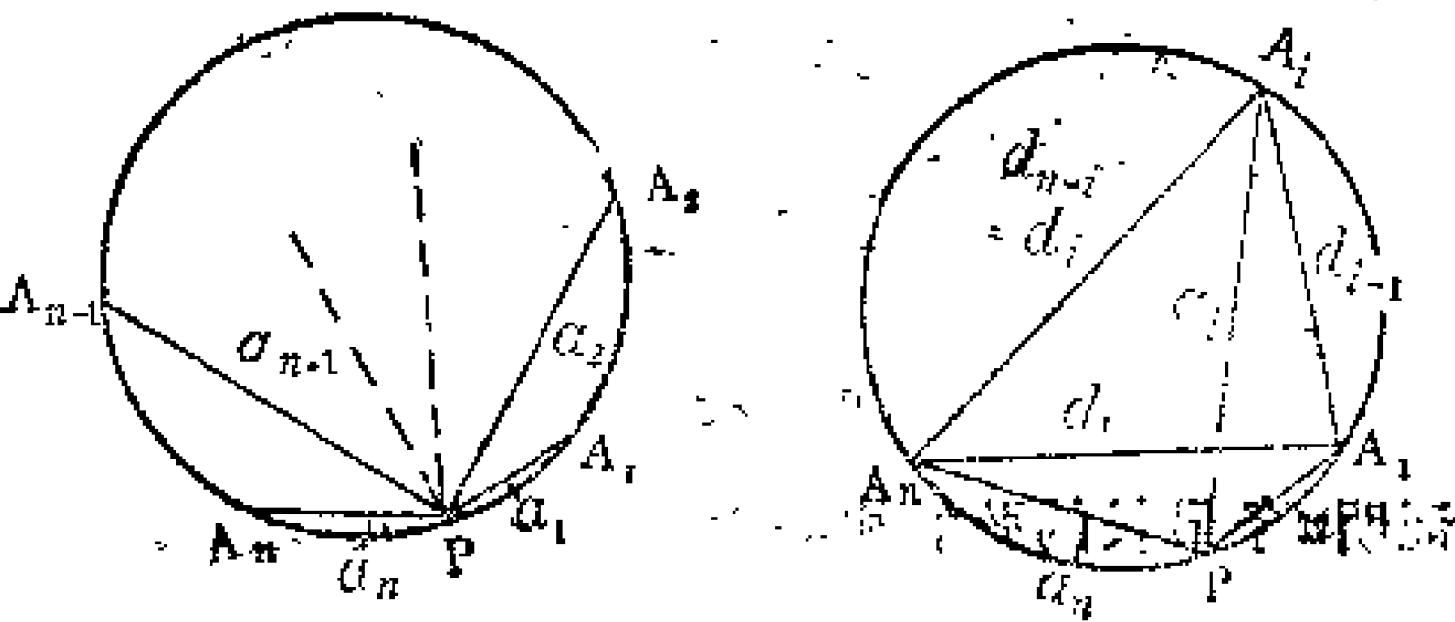


图 81

$-d_{n-1}$) (之所以是 $-d_{n-1}$ 是因为 $n-1$ 是偶数) .

由于 $d_1=d_{n-1}d_2=d_{n-2}, \cdots$, 所以 $d_1-d_2+d_3-d_4+\cdots-\cdots+d_{n-2}-d_{n-1}=0$. 于是得

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots-\cdots+a_n=0 \text{ .}$$

六十七、又一个

丢番图方程

设 y 与 z 是自然数, 满足方程

$$y^3 + 4y = z^2,$$

证明 y 等于2倍平方数.

解答 令 k^2 表示整除 y 的最大平方数, 并设 $y = nk^2$. 于是 n 绝无重因子, 否则就有大于 k^2 的一个平方数能除尽 y . 由

$$y^3 + 4y = z^2$$

推出

$$y(y^2 + 4) = z^2,$$

$$nk^2(y^2 + 4) = z^2,$$

这表明

$$k^2|z^2, \text{ 因而 } k|z.$$

令 $z = mk$, 则 $nk^2(y^2 + 4) = m^2k^2$, 即 $n(y^2 + 4) = m^2$. 这说明 $n(y^2 + 4)$ 是一个完全平方. 但是 n 是没有重因子的, 所以 n 的全部因子必然要在 $y^2 + 4$ 中出现, 这就是说

$$n|y^2 + 4.$$

由于 $y = nk^2$, 所以

$n \mid n^2 k^4 + 4$, 因而 $n \mid 4$.

于是 $n=1, 2$, 或 4 . 因为 n 不含重因子, 故 $n \neq 4$.

要是 n 为 1 , 那末由 $n(y^2 + 4) = m^2$ 得

$$y^2 + 4 = m^2$$

然而实际上不存在相差为 4 的两个平方数, 所以如果原方程有解的话, n 只能等于 2 . 这样一来 y 就是一个平方数的两倍了.

我们指出 $y=2(=2 \cdot 1^2)$, $z=4$ 就是解, 而且可以证明是唯一的自然数解.

六十八、复数的一个

不寻常的性质

当 $x=1+i\sqrt{3}$, $y=1-i\sqrt{3}$, $z=2$ ($i=\sqrt{-1}$) 时, 下面三式是成立的:

$$x^5+y^5=z^5, \quad x^7+y^7=z^7, \quad x^{11}+y^{11}=z^{11}$$

现在请你证明上式的令人吃惊的推广: 对于如上选定的 x, y, z 的特定值, 方程

$$x^p+y^p=z^p$$

对一切素数 $p>3$ 都成立.

解答 作简易的计算便知道 x^6 与 y^6 都等于 2^6 . 因为 $6n, 6n+2, 6n+3, 6n+4$ 都不是素数, 大于3的素数必形如 $6n+1$ 或 $6n-1$.

若 $p=6n+1$, 则

$$\begin{aligned} x^p+y^p &= x^{6n+1}+y^{6n+1} \\ &= (x^6)^n \cdot x + (y^6)^n \cdot y \\ &= 2^6 \cdot x + 2^6 \cdot y \\ &= 2^6 (x+y). \end{aligned}$$

因 $x+y=2$, 故

$$x^p+y^p=2^6 \cdot 2=2^{6n+1}=z^p.$$

注意

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} = \frac{1}{z},$$

我们便可类似地证明方程对 $p=6n-1$ 也成立。

六十九、圆链

半径为1千米的圆 C_0 与直线 L 切于 Z (图82)。

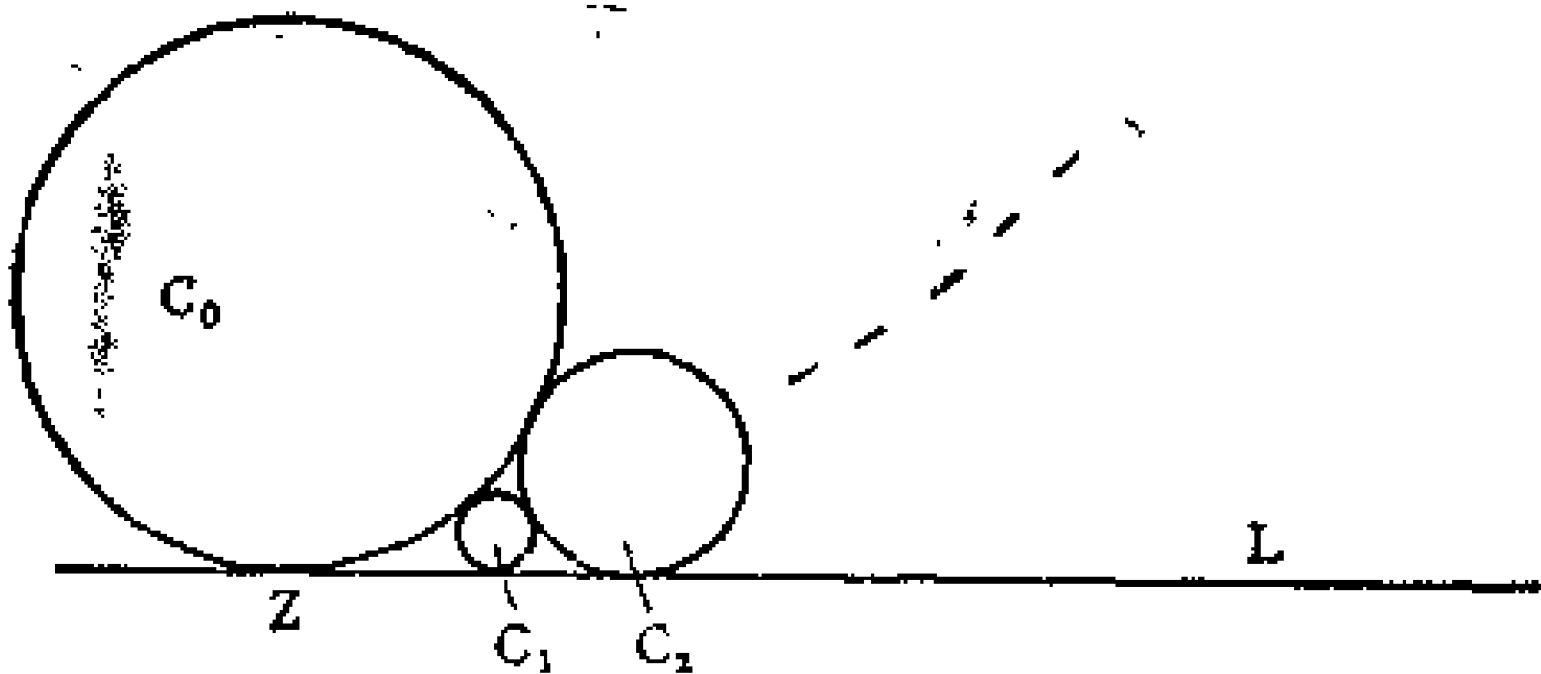


图 82

在 C_0 的右侧作一个半径为 1 毫米的圆 C_1 与 C_0 和 L 相切。在外侧右边作一族圆 C_i ，使每个圆 C_i 都与 C_0 ， L 和 C_{i-1} 相切。这些圆越来越大，最后，圆的个数再也不能增多了。试问这种圆至多能作多少个？

解答 约定距离的单位用毫米，那末圆 C_1 的半径为1， C_0 的半径为 10^5 。把这族圆关于 Z 为中心， $2 \cdot 10^5$ 为半径的圆 I 作反演(图83)。〔关于圆反演，请参阅参考文献。〕因为 L 通过了反演中心 Z ，所以它就反演成它自己。而 I 与 C_0 相内切，不妨设切点为 X ，因 C_0 通过 Z ，故反演后的像是一条直线 C_0' 即

I 与 C_0 在 X 处的公切线,于是 L 与 C_0' 就是 C_0 的切线,分别在同一直径的两端与 C_0 相切.因此 L 与 C_0' 平行,组成平面上的一条带子 S .

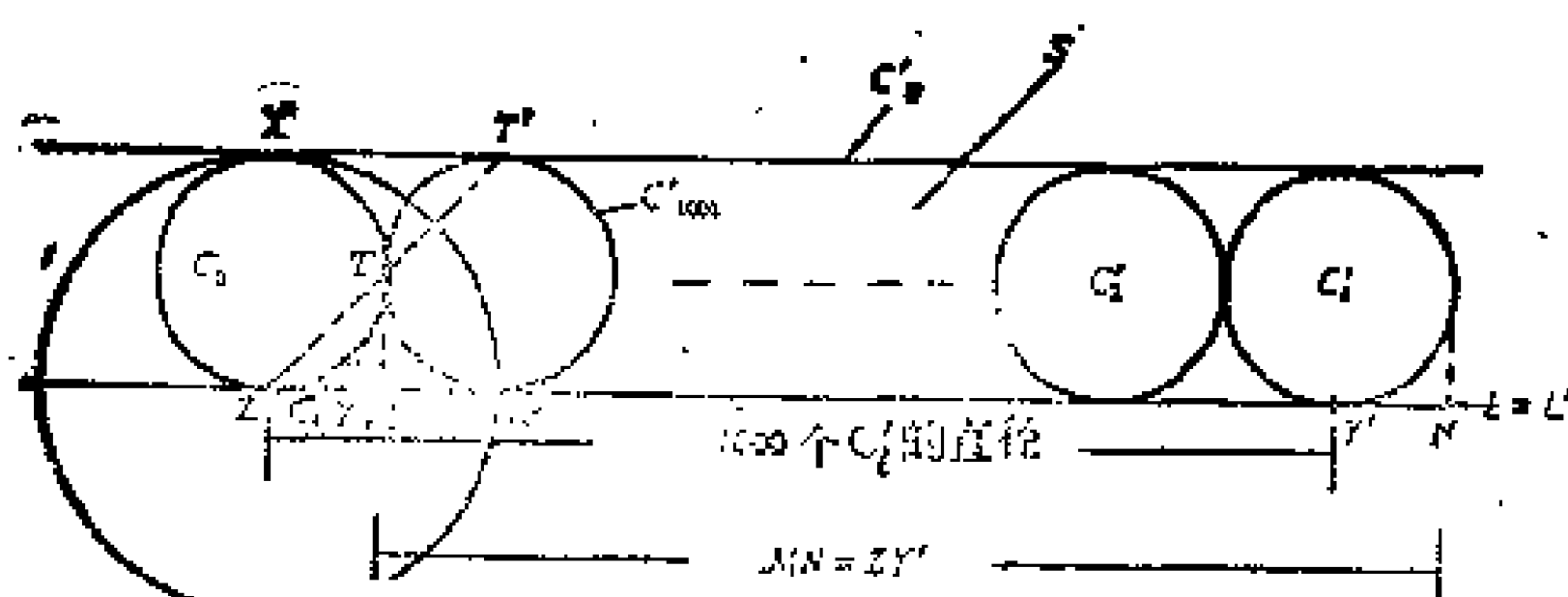


图 83

由于这族圆中的每一个圆 C_i 都与 C_0 和 L 相切,所以它们每一个的像 C_i' 也就与 S 的两条边相切.除 C_0 外,这族圆中没有一个通过 Z ,所以像 C_i' 都是圆.这样一来,这族圆中两两相切的圆的像就组成了一排等圆,它们两两相切,以 S 的两边为界.全部圆都和 C_0 一样大.因为 C_1 在反演圆 I 内靠近圆心 Z ,所以它的像就在 I 的反面,在条带 S 的远离 I 的地方. i 依次取值 $1, 2, 3, \dots$ 时,这一排像圆就沿着 S 向 C_0 靠拢.

设 C_1 与 C_1' 分别在 Y 与 Y' 与 L 相切.用毕达哥拉斯定理很快就知道 $ZY = 2 \cdot 10^3$ (图84).于是由反演关系知

$$PR = 10^6 + 1, \quad PQ = 10^6 - 1$$

论就是: $C_{1000} \equiv C'_{1000}$ 与 C_0 大小一样. 在画这族圆时, 越到后面圆越大, 到达 C_{1000} 时就变成和最初的圆 C_0 一样大. 所以圆的链环到此再也无法多加一个圆了. C_{1000} 就是这个链环中的最后一环的那个圆.

注意, 我们这族圆组成了 (关于 C_0, L 的) 施坦纳 (Steiner) 链环的一部分, 这里把直线 L 看成半径是无穷大的圆.

参 考 文 献

Coxeter and Greitzer, Geometry Revisited, vol 19, New Mathematical Library, Math. Assoc. of America, p.108 ff.

七十、完全平方数

末尾的重复数字

试问完全平方数末尾非零相同数字最多有多少个？并求出一个最小的这种平方数。

解答 对任意自然数 n 均有

$$n \equiv 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4 \pmod{10}$$

故

$$n^2 \equiv 0, 1, 4, 9, 6 \pmod{10}.$$

所以一切平方数的末尾都不会是2, 3, 7, 8. 于是我们只消研究1, 4, 5, 6, 9这几个数字. 由于 n 要么是偶数, 要么是奇数, 所以

$$\begin{aligned} n^2 &= (2a)^2 = 4a^2, \text{ 或 } n^2 = (2a+1)^2 \\ &= 4(a^2+a)+1, \end{aligned}$$

这表示, $n^2 \equiv 0$ 或 $1 \pmod{4}$. 因为数目字

$$ab \cdots cxy = ab \cdots c00 + xy \equiv xy \pmod{4},$$

可以看出, 平方数不会以11, 55, 66或99为结尾, 因为这几个都 $\equiv 2$ 或 $3 \pmod{4}$. 所以平方数末尾的相同非零数字只可能是4.

只要一个平方数的末尾有4个4, 那末

$$n^2 = ab \cdots c4444 = ab \cdots c0000 + 4400 + 44.$$

因为 $16|10000$, $16|4400$, 所以 $n^2 \equiv 12 \pmod{16}$. 若以16为模, 就有 $n \equiv 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 7$ 或 8 , 由此就有

$n^2 \equiv 0, 1, 4, 9, 0, 9, 4, 1$, 或 0 , 但绝不是 12 .

因此平方数末尾至多只能有三个非零相同数字.
444不是平方数, 我们发现

$$1444 = 38^2,$$

这个数末尾是3个4, 也是最小的这种平方数.

七十一、一条 分角线

在 $\triangle ABC$ 中 $AC=BC$ 以 C 为心 作半径 $< AC$ 的圆 K (图85). 试在 K 上求一点 P , 使其切线平分角 APB .

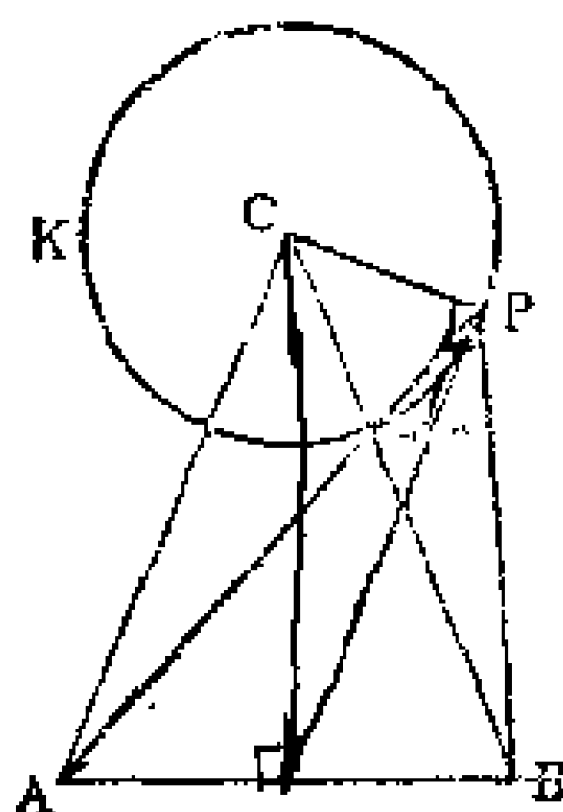
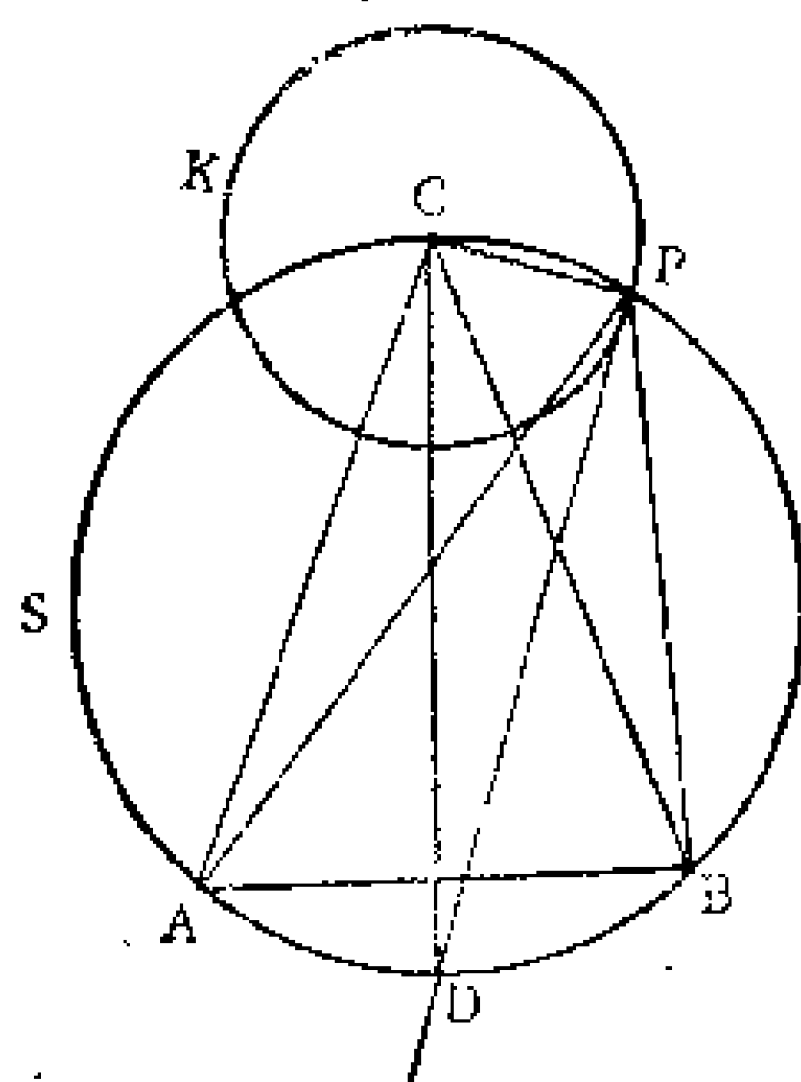


图 85

解答 令人惊讶的是, 对问题中的任何圆 K , 点 P 都在 $\triangle ABC$ 的外接圆 S 上(图86).

令 CD 为 S 的过 C 的直径, 则 $\angle CPD$ 为直角, PD 就成了在 P 点切于 K 的切线. 但是, 因为 $AC=BC$, 故 CD 平分 $\angle ACB$, 因而 D 平分弧 AB . 所以 $\angle APD = \angle DPB$.



86

七十二、不等式组

设下列联立不等式组有解 x 存在,问整数 n 最大是多少?

$$k < x^k < k+1, \quad k=1, 2, 3, \dots, n,$$

$$1 < x < 2$$

$$2 < x^2 < 3$$

$$3 < x^3 < 4$$

$$4 < x^4 < 5$$

$$\dots\dots\dots?$$

解答 n 最大是4.如果有 x 满足了前5个这种不等式,那末由第3式得

$$3 < x^3,$$

又从第5式得 $x^5 < 6$. 于是得到

$$3^5 < x^{15} < 6^3,$$

这就等于是要求 $243 < 216$. 因此应该 $n \leq 4$.

由于 $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$, 所 $\sqrt[3]{3}$ 与 $\sqrt[4]{5}$ 之间的任何 x 满足前4个不等式.

七十三、正26边形的一个 意想不到的性质

在以 O 为心的一个圆内有一个内接正26边形 $A_1A_2\cdots A_{26}$ (图87). 圆心 O 关于弦 $A_{26}A_1$ 与 A_2A_3 的

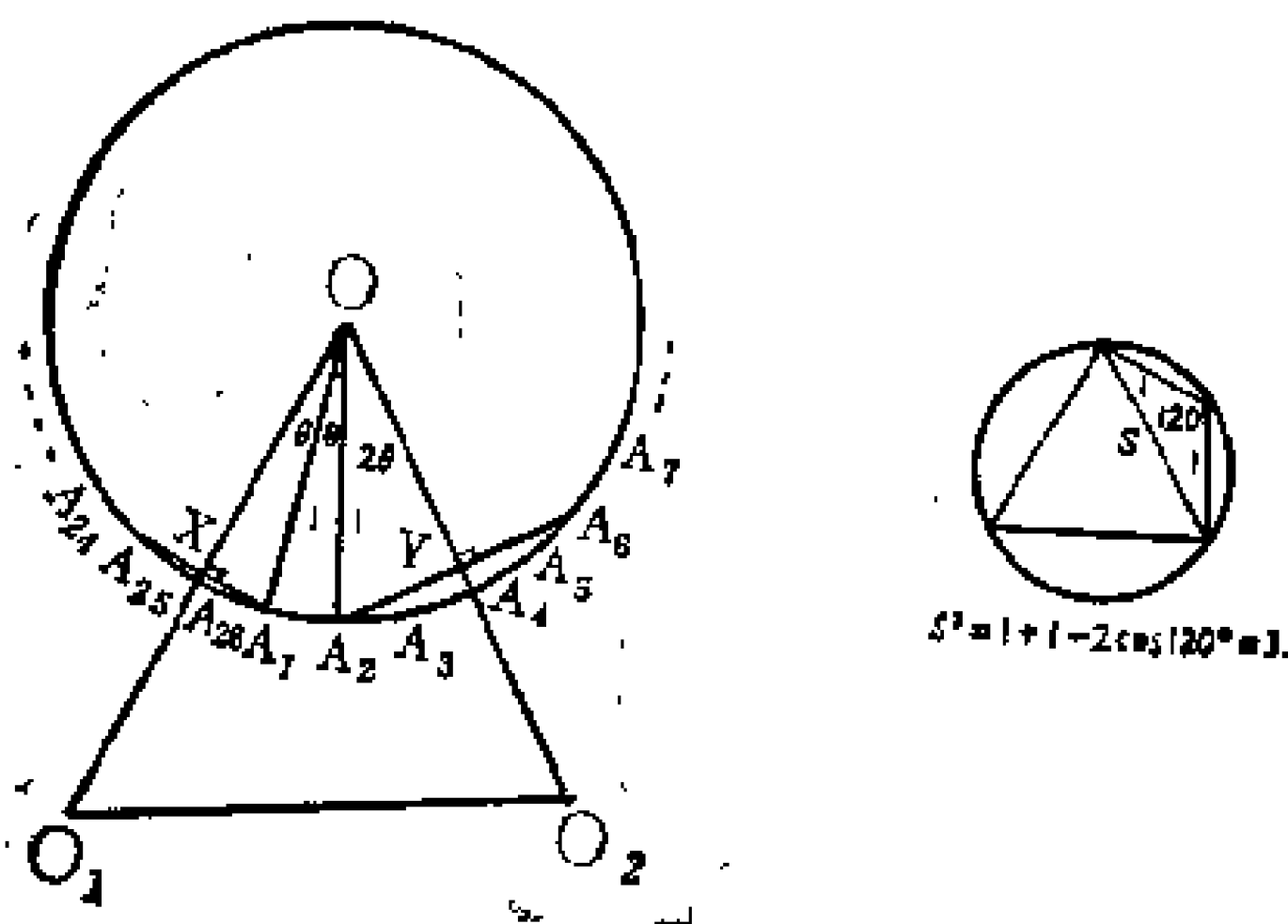


图 87

反射像(对称点)分别为 O_1 与 O_2 . 试证明这样一条突出的性质: O_1O_2 等于圆内接正三角形的边长.

解答 取圆的半径作为长度单位. 我们以圆半径作步长, 在圆周上得六点画出正六边形, 每隔一个顶点相连, 得一圆内接正三角形. 由余弦定律可知, 单位圆内接正三角形一边之长为 $\sqrt{3}$. 下面我们来证明 $O_1O_2=\sqrt{3}$.

OO_1 是 $A_{25}A_1$ 的垂直平分线, 它要通过 A_{13} ; 同样地 OO_2 要通过 A_4 . 把正26边形的一条边所对的圆心角表示成 θ , 则 $\theta = 2\pi/26 = \pi/13$, 因而 $\angle A_1OA_2 = \theta$; 若 $A_{25}A_1$ 与 A_1A_5 的中点分别为 X 和 Y , 则有 $\angle A_1OX = \theta$, $\angle A_2OY = 2\theta$. 由于半径 A_1O , A_2O 为1, 所以 $OX = \cos\theta$, $OY = \cos 2\theta$, 其二倍为 $OO_1 = 2\cos\theta$, $OO_2 = 2\cos 2\theta$.

对 $\triangle OO_1O_2$ 用余弦定律得

$$\begin{aligned} O_1O_2^2 &= OO_1^2 + OO_2^2 - 2(OO_1)(OO_2)\cos 4\theta \\ &= 4\cos^2\theta + 4\cos^2 2\theta - 2(2\cos\theta) \\ &\quad (2\cos 2\theta)(\cos 4\theta). \end{aligned}$$

下面只用一些尽人皆知的三角公式就够了. 由 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ 推知 $4\cos^2 x = 2 + 2\cos 2x$, 于是

$$\begin{aligned} O_1O_2^2 &= (2 + 2\cos 2\theta) + (2 + 2\cos 4\theta) - 8\cos\theta \\ &\quad \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 4\theta \\ &= 4 + 2\cos 2\theta + 2\cos 4\theta - 8\cos\theta \cdot \cos 2\theta \cdot \\ &\quad \cos 4\theta. \end{aligned}$$

你看, 通乘以 $\sin\theta$ 就有

$$\begin{aligned} O_1O_2^2 \sin\theta &= 4\sin\theta + 2\sin\theta \cdot \cos 2\theta + 2\sin\theta \cdot \\ &\quad \cos 4\theta - 8\sin\theta \cdot \cos\theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 4\theta. \end{aligned}$$

但是

$$8\sin\theta \cdot \cos\theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 4\theta = 4\sin 2\theta \cdot \cos 2\theta \cdot$$

$$\begin{aligned} & \cos 4\theta \\ &= 2\sin 4\theta \cdot \cos 4\theta \\ &= \sin 8\theta. \end{aligned}$$

而对一切自然数 n 均有

$$2\sin\theta \cdot \cos n\theta = \sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta.$$

因而

$$\begin{aligned} O_1 O_2^2 \sin\theta &= 4\sin\theta + (\sin 3\theta - \sin\theta) + \\ & \quad (\sin 5\theta - \sin 3\theta) - \sin 8\theta. \end{aligned}$$

然而由 $\theta = \pi/13$ 有 $13\theta = \pi$, 也可以表示为 $5\theta + 8\theta = \pi$, 从而 $\sin 5\theta = \sin 8\theta$. 所以

$$O_1 O_2^2 \sin\theta = 3\sin\theta, \quad O_1 O_2 = \sqrt{3}.$$

七十四、再谈

完全平方数

试证明使

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

是完全平方数的 x 只有 $x = -1, 0, 3$.

解答 这个问题一直拖了七年都未解决，后来贝奈特 (Bennett) 教授用大家熟知的“配完全平方”的办法巧妙地把这个难题攻克了。

我们来求方程

$$y^2 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

的整数解，试用 x 去确定 y ，我们知道

$$\left(x^2 + \frac{x}{2}\right)^2 = x^4 + x^3 + \frac{x^2}{4},$$

这正好提供了前两项， $x^2 + \frac{x}{2} + 1$ 的值相当接近要

求；但是

$$\begin{aligned}\left(x^2 + \frac{x}{2} + 1\right)^2 &= x^4 + x^3 + \frac{9}{4}x^2 + x + 1 \\ &= y^2 + \frac{5}{4}x^2,\end{aligned}$$

在 $x \neq 0$ 时又大了一点，另一方面，

$$\begin{aligned}
& \left(x^2 + \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = x^4 + x^3 + \frac{2\sqrt{5}-1}{4}x^2 \\
& + \frac{\sqrt{5}-1}{4}x + \frac{3-\sqrt{5}}{8} \\
& = y^2 - 5 - \frac{2\sqrt{5}}{4}\left(x + \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 < y^2,
\end{aligned}$$

不等式的得出是因为 $(5-2\sqrt{5})/4$ 是正数，而 $x \neq -(3+\sqrt{5})/2$ (无理数)。因此我们得到了两个估计值，一个大了，另一个小了。所以， y 的大小一定是这两个近似值所确定的范围中的某一值：

$$x^2 + \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{4} < |y| \leq x^2 + \frac{x}{2} + 1,$$

也就是

$$x^2 + \frac{x + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{2} < |y| \leq x^2 + \frac{x+2}{2}.$$

对于 $(\sqrt{5}-1)/2 < k \leq 2$ 范围内的某个实数 k ， y 的大小必定可以精确地由下式得出：

$$|y| = x^2 + \frac{x+k}{2}.$$

但是 x 与 y 都是整数，所以 $(x+k)/2$ 必为整数，从而 $x+k$ 就必须是偶整数， k 也就必须是整数。由于 $(\sqrt{5}-1)/2$ 的值在 0 与 1 之间，因之 k 在上述范围内的整数值只有 1 与 2，即 $k=1$ 或 2。

$k=2$ 时, 我们有

$$|y|=x^2+\frac{x}{2}+1,$$

由先前已得出的

$$(x^2+\frac{x}{2}+1)^2=y^2+\frac{5}{4}x^2$$

得到 $y^2=y^2+\frac{5}{4}x^2$, 从而得 $x=0$.

$k=1$ 时, 我们有

$$|y|=x^2+\frac{x+1}{2}.$$

然而很容易验证

$$y^2=(x^2+\frac{x+1}{2})^2-\frac{(x-3)(x+1)}{4}.$$

所以在 $k=1$ 时就有

$$y^2=y^2-\frac{(x-3)(x+1)}{4}.$$

这蕴涵 $(x-3)(x+1)=0$, 从而 $x=3$ 或 -1 . 通过常规检验, 证实 $x=-1, 0, 3$ 的确使 y 取整数值, 这就是本题要证的结论.

很长时间以来我一直觉得这段推理很不错, 的确是颇为引人注目的一项成就, 所以当我在南非开普敦地区为高中学生所办的简朴油印刊物“数学文摘”上发现还有一个类似的更加优美的解答时,

真感到惊异和高兴。该刊是开普敦大学约翰·威布 (Webb) 教授主编的, 下面引用的解法登在 1973 年 7 月号上。

请注意

$$\begin{aligned} \left(x^2 + \frac{x}{2}\right)^2 &= x^4 + x^3 + \frac{x^2}{4} \\ &= x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 - \left(\frac{3}{4}x^2 + x + 1\right) \\ &= y^2 - \frac{1}{4}(3x^2 + 4x + 4). \end{aligned}$$

因为 $3x^2 + 4x + 4$ 的判别式 (即 $4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = -32$) 为负, 所以对一切实数 x , $3x^2 + 4x + 4$ 都是正的。因此,

$$\left(x^2 + \frac{x}{2}\right)^2 < y^2,$$

由此得

$$\left|x^2 + \frac{x}{2}\right| < y.$$

由于 $x^2 + x/2 = x(x + \frac{1}{2})$ 对一切整数 x 都是非负的, 所以

$$\left|x^2 + \frac{x}{2}\right| = x^2 + \frac{x}{2},$$

于是得到

$$x^2 + \frac{x}{2} < |y|.$$

如果 x 是偶数，则 $x^2 + \frac{x}{2}$ 就是整数，而更大的整数 $|y|$ 必定比它至少大1. 如果 x 是奇数，则 $x^2 + \frac{x}{2}$ 在相邻二整数之间的中部，因而 $|y|$ 比它只可能大 $\frac{1}{2}$. 无论如何总有

$$|y| \geq (x^2 + \frac{x}{2}) + \frac{1}{2},$$

由此得

$$\begin{aligned} y^2 &\geq x^4 + x^3 + \frac{5}{4}x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \\ &= x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right) \\ &= y^2 + \frac{1}{4}(x^2 - 2x - 3). \end{aligned}$$

此式蕴涵

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 &\leq 0, \\ (x+1)(x-3) &\leq 0, \end{aligned}$$

这就把 x 的值限制在 $(-1, 0, 1, 2, 3)$ 之中了. 直接把这些数进行验算，就能排除 $x=1, 2$ ，真正的解也就得到了.

七十五、奇怪的多项式

若 $P(x)$ 是一个 n 次多项式, 且

$$P(x) = 2^x, \quad x = 1, 2, 3, \dots, (n+1),$$

试求 $P(n+2)$.

解答 由二项式定理知

$$2^m = (1+1)^m = C_m^0 + C_m^1 + \dots + C_m^m, \quad m = 1,$$

$2, \dots, n+1$.

设 n 是一个任意确定的自然数. 我们来考虑多项式

$$f(x) = 2(C_{x-1}^0 + C_{x-1}^1 + \dots + C_{x-1}^n).$$

$f(x)$ 中次数最高的项是

$$2C_{x-1}^n = 2 \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}{n!},$$

这是 x 的 n 次式, 所以 $f(x)$ 是 n 次式. 但是 $x = 1,$

$2, \dots, n+1$ 时我们有

$$f(x) = 2[(1+1)^{x-1}] = 2^x$$

(对 $m < n, C_m^n = 0$).

这说明 $f(x)$ 与所求的 $P(x)$ 都是 n 次式, 并且对 $x = 1, 2, \dots, n+1$ 这 $n+1$ 个数值它们的值相同. 所以 $f(x)$ 恒等于 $P(x)$, 于是有

$$\begin{aligned}
 P(n+2) &= 2 \left(C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + \cdots + C_{n+1}^n \right) \\
 &= 2 \left(2^{n+1} - C_{n+1}^{n+1} \right) = 2^{n+2} - 2.
 \end{aligned}$$

同样可得

$$\begin{aligned}
 P(n+3) &= 2 \left(2^{n+2} - C_{n+2}^{n+1} - C_{n+2}^{n+2} \right) \\
 &= 2 \left(2^{n+2} - (n+2) - 1 \right) = 2^{n+3} - 2n - 6.
 \end{aligned}$$

七十六、形心圆

设 A, B, C, D 是圆周上的四个点, G_A, G_B, G_C, G_D 分别表示三角形 BCD, ACD, ABD, ABC 的形心(图88).试证 G_A, G_B, G_C, G_D 四点共圆.

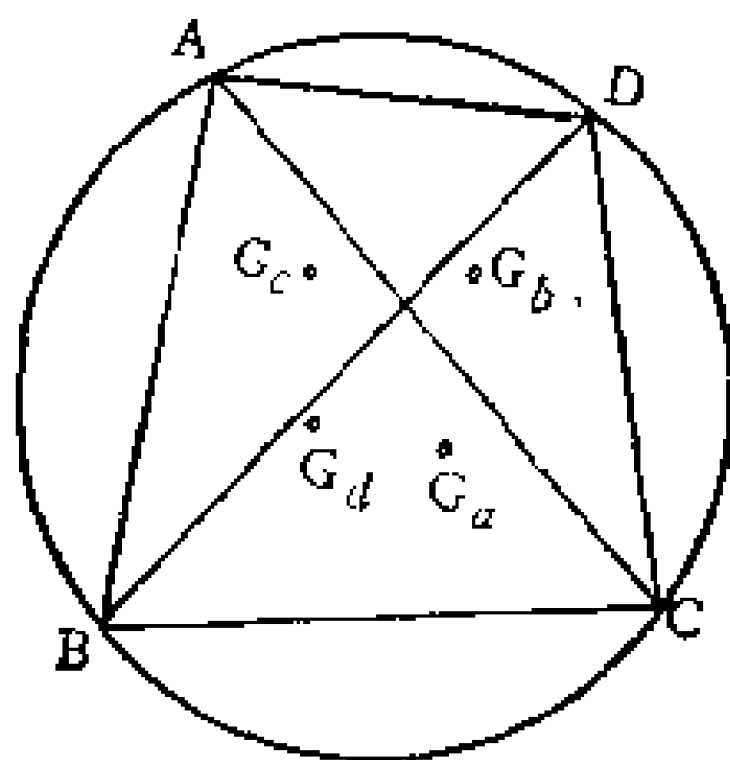


图 88

解答 在 A, B, C, D 四点上各悬一单位质量,用 G 表示这个系统的重心. A, B, C 处的单位质量等价于 G_D 处的三单位质量,于是整个系统就等价于 G_D 处三单位质量与 D 处的一单位质量,所以 G 必定在 $G_D D$ 上,并以 $1:3$ 的比例把它分为两段(图89).

同样， G 也必须在 $G_A A$, $G_B B$, $G_C C$ 上，并按 $1:2$ 的比例分割各线段。这样 一 来，膨胀变换 G $(-1/3)$ 就会把 A , B , C , D 分别 变为 G_A , G_B ,

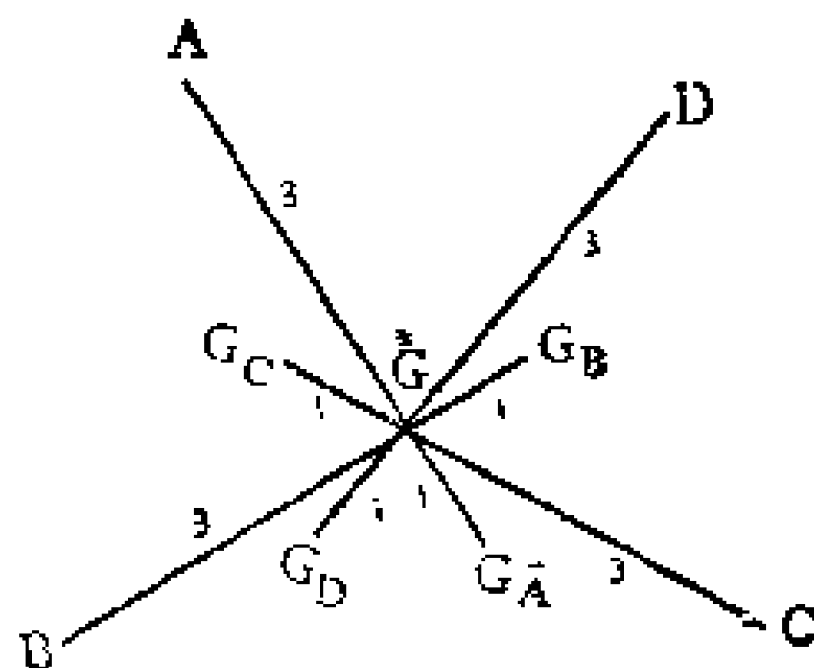


图89

G_C , G_D . 但是经过膨胀，圆依然是圆. 由于 A , B , C , D 共圆，所以 G_A , G_B , G_C , G_D 也共圆.

对任一多边形的 n 个顶点， $(n-1)$ 个顶点的诸集的 n 个形心可以确定一个类似的多边形. 又，在三维空间中类似的情况也成立.

从“力学”入手往往可以很顺畅地解决许多相当难解的几何学问题. 要证明三角形中各种各样的点，比如形心、内心、格尔龚(Gergonne)点、纳格尔(Nagel)点等的存在，要证明彻伐(Ceva)定理和美纳劳斯(Menelaus)定理这类定理，都是很简单的事情.

下面是罗马尼亚举行的一次初等数学竞赛中的

一道题，我们来解一下看吧：

设 A, B, C 是一张平面上的定点， A', B', C' 是另一张平面 π 上的变动点， AA', BB', CC' 的中点是 L, M, N ，试问 $\triangle LMN$ 的形心 S 的轨迹是什么？

解答：在 A, B, C, A', B', C' 各点处都悬一个单位质量， A 与 A' 处的质量等价于在中点 L 处的二单位质量。同样我们可以看出整个质量系等价于在 L, M, N 每处均悬二单位质量，所以 $\triangle LMN$ 的形心 S 就是整个质量系的重心。

A, B, C 处的质量等效于 $\triangle ABC$ 的形心 G 处置三单位质量；同样， A', B', C' 处的质量等效于 $\triangle A'B'C'$ 的形心 G' 处置三单位质量。这样一来重心 S 必然要平分线段 GG' 。随着 A', B', C' 在平面 π 上变动， G' 也就遍历 π 上的一切位置，然而 G 在其所属的平面上是定点，所以 S 的轨迹就是平面 π 经拉伸变换 $G(1/2)$ 所变成的平面。

本节最后一个问题是滑铁卢大学 M. 克兰姆金 (Klamkin) 解决的：

试证明：外切于已知球面的绕四边形 $ABCD$ 的切点 P, Q, R, S 共圆。

解答 从一点到球面的所有切线都是一样长

的. 令 $AP=AS=a$, $BP=BQ=b$, $CQ=CR=c$, $DR=DS=d$ (图90) A, B, C, D 处所带质量分别为 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$. A, B 两点的质量绕 P 点的矩是反向相等的, 所以它们等效于 P 处的大小为 $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ 的质量. 同样, C, D 两处的质量也等效于 R 处的某一质量, 所以整个质量系的重心 G 必然位于线段 PR 上的某处. 同样, B, C 两处的质量合在一起, A, D 两处的质量也合在一起, 那末 G 必然在 QS 上. 这等于是说 PR 与 QS 必定相交 (于 G). 因此它们确定某张平面 π . 显然, 切点 P, Q, R, S 属于平面 π 与球面所截出的圆.

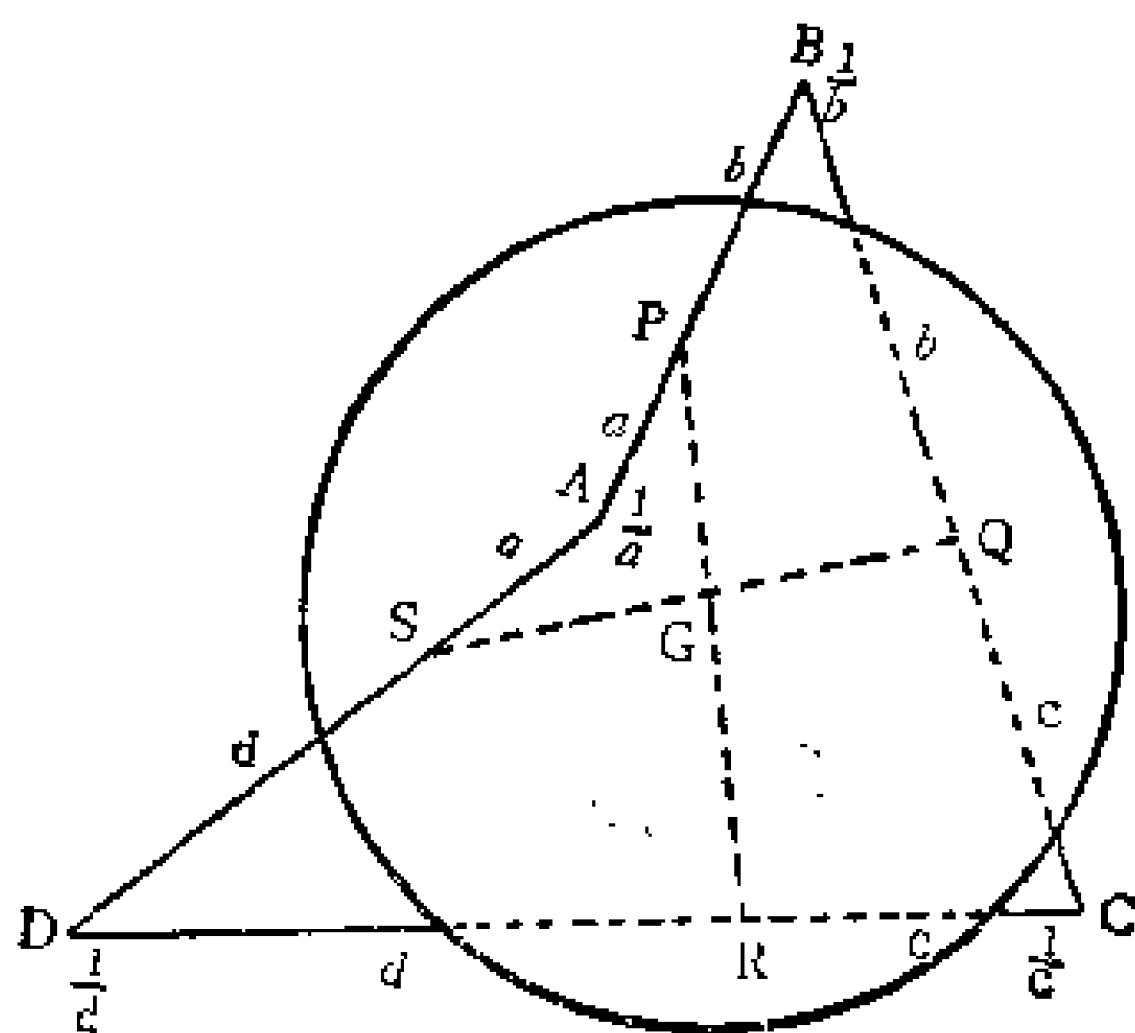


图 90

七十七、容易求出的 余式

$x + x^9 + x^{25} + x^{49} + x^{81}$ 除以 $x^3 - x$, 余式若何?

解答 我们有

$$\begin{aligned} & \frac{x^{81} + x^{49} + x^{25} + x^9 + x}{x^3 - x} \\ &= \frac{x^{80} + x^{48} + x^{24} + x^8 + 1}{x^2 - 1} \\ &= \frac{(x^{80} - 1) + (x^{48} - 1) + (x^{24} - 1) + (x^8 - 1) + 5}{x^2 - 1} \end{aligned}$$

由于 $x^2 - 1$ 能除尽 $x^{2n} - 1$, 看来余式应为 53. 但曾从分子分母中约去过 x , 所以余式实际上应为 $5x$, 因为

$$\frac{5}{x^2 - 1} = \frac{5x}{x^3 - x}$$

七十八、3的一个

奇特性质

试证明：如果 m 与 n 是两个自然数，那么 $\sqrt[n]{m}$ 与 $\sqrt[n]{n}$ 之一永远小于或等于 $\sqrt[3]{3}$ 。

解答 设 $m=n$ ，我们想证明的是 $\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[3]{3}$ ，即 $n^{\frac{1}{n}} \leq 3^{\frac{1}{3}}$ ，也就是说想证 $n^3 \leq 3^n$ 。我们马上会看出这一关是很容易用归纳法证明的。显然，对 $n=1, 2, 3$ 我们的论断是真的，今设

$$n^3 \leq 3^n$$

对 $n \geq 3$ 成立，于是

$$\begin{aligned} 3^{n+1} &= 3 \cdot 3^n \geq 3n^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + (n-3)n^2 + \\ &\quad (n^2-3)n > n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &= (n+1)^3 \end{aligned}$$

因此，对 $m=n$ 论断是成立的。

这似乎只是一个特例，一般情形是 $m \neq n$ 。然而，事实恰恰相反。因为，如果 $m < n$ ，则

$$\sqrt[n]{m} < \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[3]{3}.$$

我们看得出，只有 $m=n=3$ 时等号才成立。

七十九、正方形内的 一个正方形

如图91所示，从正方形的顶点向边的中点划直线，试证明这样得到的小正方形的面积是大正方形的 $\frac{1}{5}$ 。

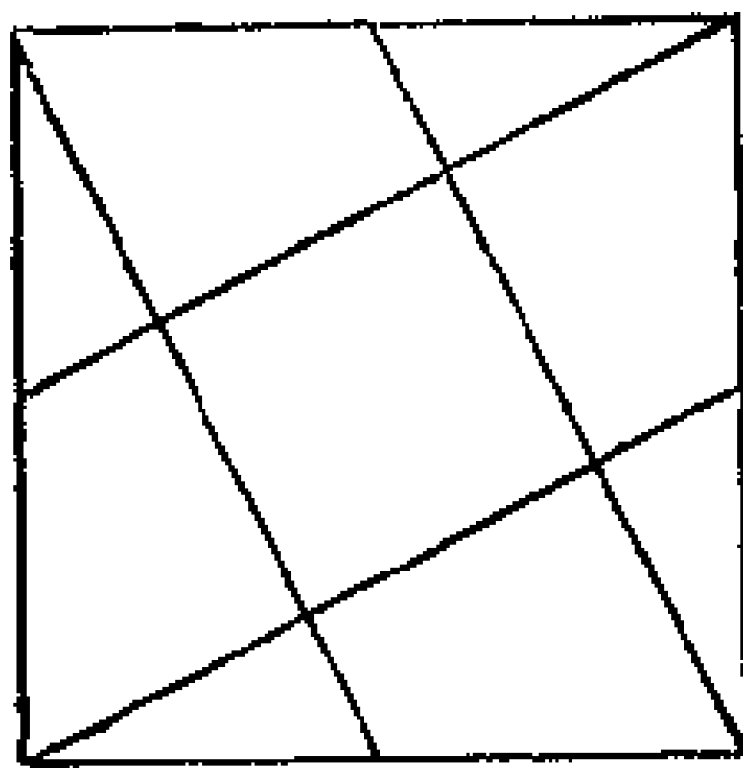


图91

解答 如图92所示的五个相等正方形组成的“十字形”中，直线 AD 显然交 PQ 于其中点 X ，因而三角形 APX 与 XQD 全等，所以我们可以把 $\triangle APX$ 切下，放到 $\triangle XQD$ 位置上去。在 A, B, C, D 各点都这样作，不难看出会得到一个正方形。

然而面积不因此而有任何变化，所以中央小正方形占有总面积的 $\frac{1}{5}$ 。

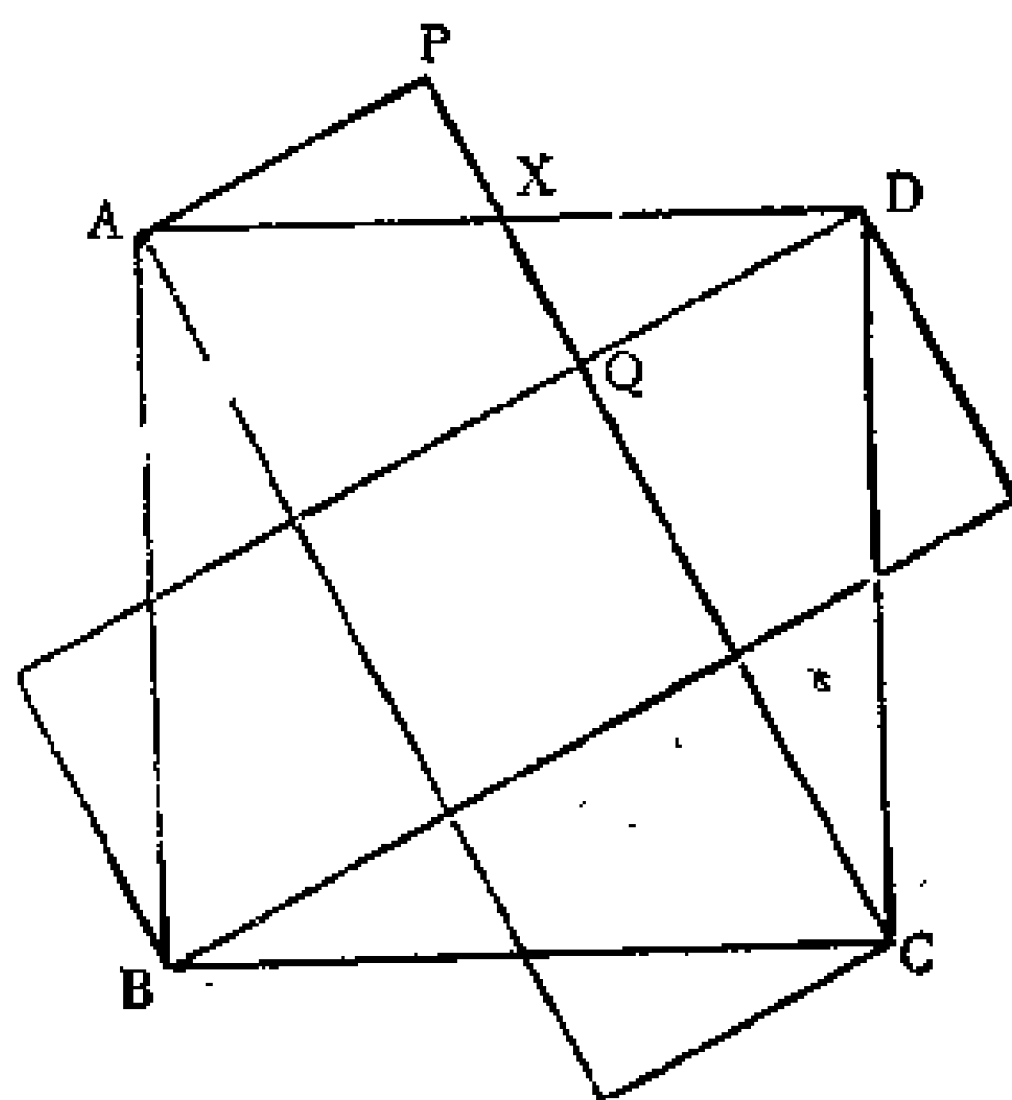


图 92

八十、永远是平方

写出偶数个1构成一个数 A ，写出个数少一半的4构成数 B ，试证 $A+B+1$ 永远是个完全平方数。

解答 设 A 有 $2m$ 位， B 有 m 位，于是

$$\left(\frac{3B}{4}\right)^2 = \left[\frac{3}{4}\underbrace{44\cdots4}_m\right]^2 = (\underbrace{33\cdots3}_m)(\underbrace{33\cdots3}_m)$$

$$= (\underbrace{11\cdots1}_m)(\underbrace{99\cdots9}_m) = (\underbrace{11\cdots1}_m)(10^m - 1)$$

$$= \underbrace{11\cdots1}_m \underbrace{00\cdots0}_m - \underbrace{11\cdots1}_m,$$

加上 $\frac{1}{2}B$ ，就是 $\underbrace{22\cdots2}_m = 2(\underbrace{11\cdots1}_m)$ ，我们得到 $\left(\frac{3}{4}B\right)^2$

$$+ \frac{1}{2}B = \underbrace{11\cdots1}_m \underbrace{00\cdots0}_m + \underbrace{11\cdots1}_m = \underbrace{11\cdots1}_{2m} = A.$$

因此

$$\begin{aligned} A+B+1 &= \left[\left(\frac{3}{4}B\right)^2 + \frac{1}{2}B\right] + B + 1 \\ &= \left(\frac{3}{4}B\right)^2 + \frac{3}{2}B + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{3}{4} \beta + 1 \right)^2 \\
&= \underbrace{(33 \cdots 34)}_{\text{根}}^2
\end{aligned}$$

八十一、将自然数 分组

设自然数分组如下:

(1), (2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9, 10),
(11, 12, 13, 14, 15), ..., 并将第偶数组划掉.
试证明留下的前 k 组之和为 k^4 . 例如在 $k=3$ 时, 就有

$$\begin{aligned}1 + (4 + 5 + 6) + (11 + 12 + 13 + 14 + 15) &= 81 \\ &= 3^4.\end{aligned}$$

解答 第 n 组之前有 $n-1$ 组, 它们包含了前

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$$

个数, 所以第 n 组的第一个数是 $\frac{(n-1)n}{2} + 1$. 同样

可知, 第 n 组的最后一个数是 $\frac{n(n+1)}{2}$. 因此第 n

组中的数的和 $S(n)$ 为

$$\begin{aligned}S(n) &= \frac{n}{2} \left[\frac{(n-1)n}{2} + 1 + \frac{n(n+1)}{2} \right] \\ &= \frac{n(n^2 + 1)}{2}.\end{aligned}$$

划去一些组后剩下的第 k 组, 实际上在原来顺序中是

第 $2k-1$ 组. 所以我们要证明的就是

$$S(1) + S(3) + \cdots + S(2k-1) = k^4$$

我们利用数学归纳法来证, 并注意 $S(1)=1$.

如果 $S(1) + S(3) + \cdots + S(2k-1) = k^4$, 则

$$\begin{aligned} S(1) + S(3) + \cdots + S(2k+1) &= k^4 + S(2k+1) \\ &= k^4 + \frac{(2k+1) [(2k+1)^2 + 1]}{2}, \end{aligned}$$

右端最终可化为 $(k+1)^4$.

八十二、边长成算术级数的三角形

试证明：如果三角形三边之长构成算术级数，那末联结形心和内心的直线与一条边平行。

解答 设三角形 ABC 三边的关系是 $c < b < a$ (a 为与顶点 A 相对的边，余类推)，于是，因三边构成算术级数，故有 $a + c = 2b$ 。

用 I 表示内心， r 表示内半径(图93)，则面积为

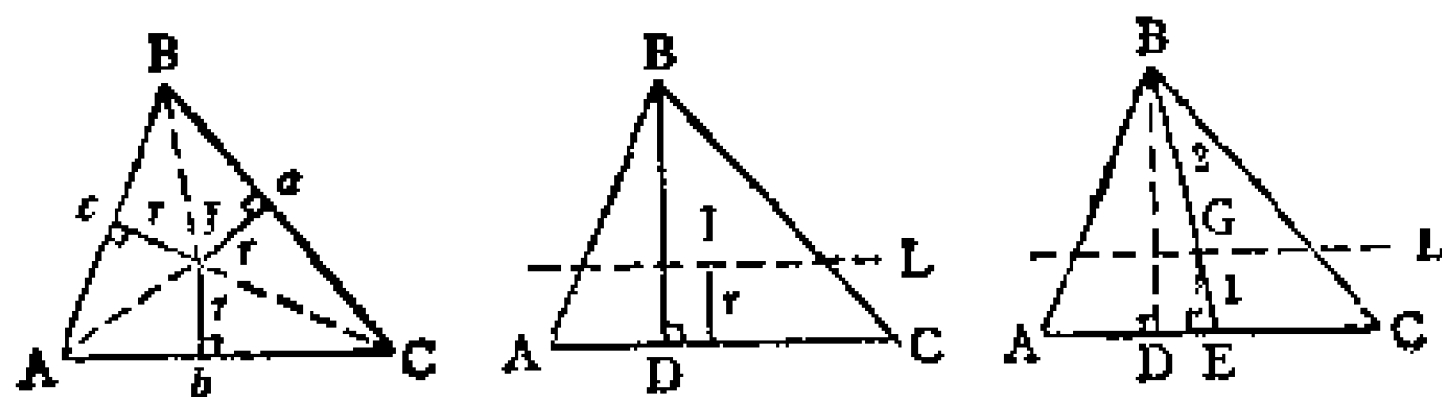


图93

$$\begin{aligned}
 \triangle ABC &= \triangle IAC + \triangle IBC + \triangle IAB \\
 &= \frac{1}{2} br + \frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} cr \\
 &= \frac{1}{2} r(a + b + c),
 \end{aligned}$$

但 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}BD \cdot b$ ，其中 BD 是从 B 引出的高，因而 $\frac{1}{2}BD \cdot b = \frac{1}{2}r(a + b + c)$ ，于是得

$$\frac{r}{BD} = \frac{b}{a+b+c} = \frac{b}{3b} = \frac{1}{3}.$$

这说明 I 在与 AC 平行且位于从 AC 到 B 的三分之一处的一条直线 L 上. 但是形心 G 按 $2:1$ 的比例分割中线 BE (由于是相似三角形), G 因而也在 L 上. 所以 GI 确定 L , 这是一条与边 AC 平行的直线.

八十三、通过排列 得出的分数

a_1, a_2, \dots, a_n 是些正实数, b_1, b_2, \dots, b_n 是它们的任意重排的结果. 试证明

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \geq n.$$

解答 因为 n 个正数的算术平均至少等于其几何平均, 所以

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left[\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \right] \\ \geq \left[\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdots \frac{a_n}{b_n} \right]^{\frac{1}{n}} = 1, \end{aligned}$$

由此立即得证结论.

八十四、关于

二项式系数

$$C_{2^n}^1, C_{2^n}^3, C_{2^n}^5, \dots, C_{2^n}^{2^n-1}$$

的最大公约数 g 等于多少?

解答 一组数的任意一个公约数总能除尽这组数的和. 本题的关键是要注意下式:

$$C_{2^n}^1 + C_{2^n}^3 + \dots + C_{2^n}^{2^n-1} = 2^{2^n-1}.$$

上式可推导如下. 根据二项式定理, 我们有

$$(1+x)^{2^n} = C_{2^n}^0 + C_{2^n}^1 x + C_{2^n}^2 x^2 + \dots + C_{2^n}^{2^n} x^{2^n}.$$

$x=1$ 时全部系数之和是 2^{2^n} . $x=-1$ 时, r 为奇数的系数 $C_{2^n}^r$ 之和等于 r 为偶数的系数 $C_{2^n}^r$ 之和. 因此已知数组的和是总和数据的一半, 即 2^{2^n-1} . 所以所求的最大公约数 g 必须整除 2^{2^n-1} , 因而必须是 2 的乘方.

假设 2^k 是整除 n 的 2 的最大乘方, 则 $n=2^k q$, 这里 q 是奇数, 于是有 $C_{2^n}^1 = 2n = 2^{k+1} q$. 因为 g 整除

C_{2n}^1 且为 2 的乘方，所以它不得大于 2^{k+1} ，我们要证明 $g=2^{k+1}$ ，办法就是证明 2^{k+1} 的确能除尽系数 C_{2n}^r ， $r=1, 3, 5, \cdots, 2n-1$ 。

注意观察

$$\begin{aligned} C_{2n}^r &= \frac{(2n)!}{(2n-r)! \, r!} \\ &= \frac{2n}{r} \left[\frac{(2n-1)!}{(2n-r)! (r-1)!} \right] \\ &= \frac{2n}{r} C_{2n-1}^{r-1} \\ &= \frac{2^{k+1}q}{r} C_{2n-1}^{r-1}. \end{aligned}$$

因为 r 是奇数， C_{2n}^r 是整数，所以在化简的时候，分子中的 2^{k+1} 一定不会被约掉，于是结论也就得到了。

八十五、费马数

F_{73}

$F_n = 2^{(2^n)} + 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$, 这样的数叫费马数, 这是为了纪念法国数学家皮埃尔·德·费马(1601—1665)而取的名字. 前五个费马数是

3, 5, 17, 257, 65537, 4294967297.

你完全可以想象 $F_{73} = 2^{(2^{73})} + 1$ 写出来会有多么的长. 这就提出一个问题: 把巨数 F_{73} 用普通的十进制记数法记录, 世界上所有图书馆的全部书是否够用. 为了回答这个问题, 我们可以利用对书和图书馆作的最粗略的估算:

一百万个图书馆, 每馆藏书一百万册, 每册书有1000页, 每页上印100行, 每行容纳100个数字.

问题的第二部分是记录 F_{73} 时最末 3 个数字是什么?

解答 1. 有了题中给出的粗略数据, 我们可以得出全世界图书馆的总容量为

$(100)(100)(1000)(1000000)(1000000) = 10^{19}$ 个数字. 数字个数是个很大的数目. 我们的问题显

然是要知道 F_{73} 的数字的个数，因为

$$2^{10} = 1024 > 10^3,$$

我们有

$$\begin{aligned} 2^{73} &= 8 \cdot 2^{70} > 8 \cdot 10^{21}, \\ 2^{(2^{73})} &> 2^{8 \cdot 10^{21}} = (2^{80})^{10^{20}} = \left[(2^{10})^8 \right]^{10^{20}} \\ &> 10^{24 \cdot 10^{20}}. \end{aligned}$$

所以 F_{73} 包含的数字个数不止 $24 \cdot 10^{20} = 240(10^{19})$ 个。要把 F_{73} 记录下来就要求有 240 个题中所述的图书馆系统。

2. 要求出 F_{73} 的最末 3 个数字，我们将不加证明地引用下面两个著名的发现：

(i) 任一自然数的平方与其 22 次方，末二位数永远相同：

$$n^{22} \equiv n^2 \pmod{100};$$

(ii) 任一自然数的立方与其 103 次方，末 3 位数字总是相同的：

$$n^{103} \equiv n^3 \pmod{1000}.$$

对于非负的 k ，性质 (i) 意味着 $\pmod{100}$

$$n^{k+22} = n^k \cdot n^{22} \equiv n^k \cdot n^2 = n^{k+2}.$$

所以可以从 ≥ 22 的指数中减去 20 而不会改变乘方的余数 $\pmod{100}$ 。重复应用此理，只要最终的指数 ≥ 2 就总可以把 20 的倍数约去。同样，性质 (ii) 也允许 $\pmod{1000}$ 去掉 100 的倍数而把指数化小，只要

最终的指数 ≥ 3 就行.

这样一来我们便有

$$2^{73} \equiv 2^{63+10} \equiv 2^{13} \pmod{100}.$$

于是 $\pmod{100}$

$$2^{73} \equiv 2^{13} = 2^3 \cdot 2^{10} = 8(1024) \equiv 8(24) = 192 \equiv 92.$$

因而对某一整数 q 有

$$2^{73} \equiv 100q + 92.$$

用性质(ii), 我们得

$$2^{(2^{73})} \equiv 2^{100q+92} \equiv 2q^2 \pmod{1000}$$

只消作简单的算术演算就可得到 $2^{92} \equiv 896 \pmod{1000}$.

因此

$$F_{73} = 2^{(2^{73})} + 1 \text{ 的末尾是 } 897.$$

圣·热尔曼(Germain)和斯丁(Steen)为此目的编过一个计算机程序, 他们算出 F_{73} 的最末40位是

$$8947301518995672165296243935786246864897.$$

现代算术的最著名的成就之一是确定了大得无比的

$$F_{1845} = 2^{(2^{1845})} + 1$$

是复合数. 在这巨大无比的数面前, F_{73} 就显得微

乎其微了. 但是若用上面的办法, 确定 F_{1945} 的末3位数字甚至比确定 F_{73} 的末3位数字还要容易些. 读者试证一下 F_{1945} 的末3位数字是 297, 也许会觉得其乐无穷.

3. 本节最后想介绍求 F_{73} 的末 3 位数字的另一个满不错的方法.

显然

$$2^{10} = 1024 = 25t - 1 \text{ (对 } t = 41) \equiv -1 \pmod{25}$$

应用二项式定理有

$$\begin{aligned} 2^{100} &= (2^{10})^{10} = (25t - 1)^{10} \\ &= (25t)^{10} - 10 \cdot (25t)^9 + \cdots - 10 \cdot (25t) \\ &\quad + 1. \end{aligned}$$

除了最后一项外, 二项展式中的每一项都能被125所整除, 所以

$$2^{100} \equiv 1 \pmod{125}.$$

但

$$\begin{aligned} 2^{73} &= 2^{(10)7} \cdot 2^3 \equiv (-1)^7 \cdot 2^3 \pmod{25} \\ &\equiv -8 \pmod{25}, \end{aligned}$$

由此得知对某整数 k 有 $2^{73} = 25k - 8$. 又显然 $4 \mid 2^{73}$, 因此

$$2^{73} \equiv 0 \equiv -8 \pmod{4},$$

$$2^{73} = 4r - 8,$$

式中 r 为某一整数. 于是

$25k - 8 = 4r - 8$, $25k = 4r$, 这蕴涵 $4 \mid k$.

令 $k = 4k_1$, 得

$$2^{73} = 100k_1 - 8 \equiv -8 \equiv 92 \pmod{100},$$

从而对某一整数 q 有

$$2^{73} \equiv 100q + 92.$$

因此

$$\begin{aligned} 2^{(2^{73})} &= 2^{100q+92} = 2^{92} (2^{100})^q \equiv 2^{92} (1)^q \\ &\pmod{125}, \end{aligned}$$

即

$$2^{(2^{73})} \equiv 2^{92} \pmod{125}.$$

令 $2^{92} \equiv x \pmod{125}$, 则

$$2^8 x = 2^{100} \equiv 1 \pmod{125},$$

于是有

$$\begin{aligned} 2^8 x = 256x &\equiv 6x \pmod{125}, \quad 6x \\ &\equiv 1 \pmod{125}. \end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned} 6x &\equiv 126 \pmod{125}, \quad x \equiv 21 \\ &\equiv -104 \pmod{125}. \end{aligned}$$

所以

$$2^{(2^{73})} \equiv x \equiv -104 \pmod{125}.$$

然而显然有 $8 \mid 2^{(2^{73})}$ 这意味着

$$2^{(2^{73})} \equiv 0 \equiv -104 \pmod{8}.$$

因此

$$2^{(2^{73})} \equiv 125s - 104 = 8w - 104,$$

由此推知, $8 \mid s$, $1000 \mid 125s$,

$$2^{(2^{73})} = 1000\nu - 104 \equiv -104 \pmod{1000} \equiv 896$$

$\pmod{1000}$. 所以 F_{73} 的最末3位数是897.

八十六、圆内接 四边形

圆内接四边形 $ABCD$ 两组对边延长后分别交于 P 与 Q (图94). 试证角 P 与角 Q 的分角线在 $ABCD$ 上所确定的四边形 $EFGH$ 恒为菱形.

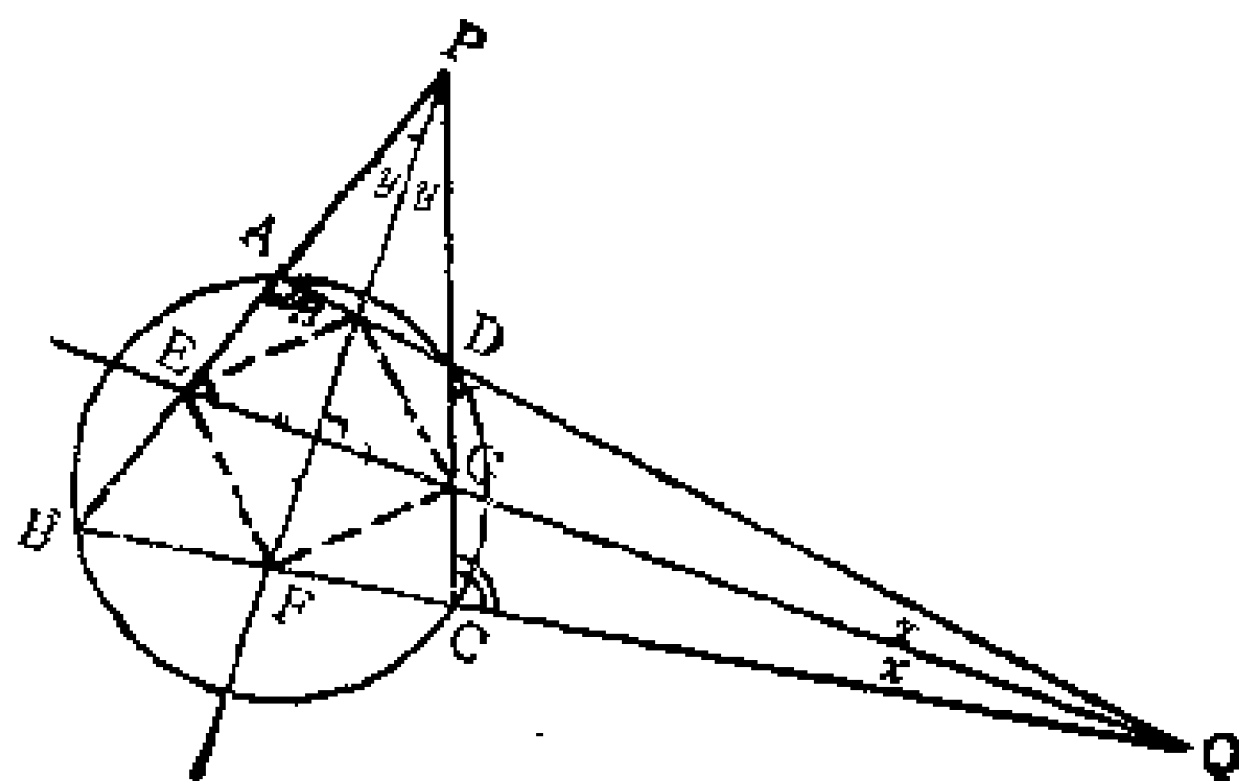


图 94

解答 因为 $ABCD$ 内接于圆, 所以外角 DCQ 等于内对角 A . 由于 DE 平分 $\angle Q$, 故 $\triangle AQE$ 的角等于 $\triangle CQG$ 的角. 因此

$$\angle CGQ = \angle AEQ.$$

但 $\angle CGQ = \angle PGE$ (对顶角).

因而

$\angle PEG = \angle PGE$, 故 $\triangle PEG$ 是等腰三角形.

所以 $\angle P$ 的分角线是底边 EG 的中垂线. H 和 F 因在中垂线上, 故与 E 、 G 两点等距; 同理, E 和 G 也与 H 、 F 等距, 所以 $EFGH$ 是菱形.

八十七、自然数的 特别三数组

找出两两互素的不同的三个自然数 x, y, z 所组成的三数组, 使得数组中任意两个数的和能被第三个数整除.

解答 设这样的一个三数组的三个数是 x, y, z , 并且 $x < y < z$. 于是
 $x + y < z + z = 2z$,
即是说 z 除和数 $x + y$ 商 2 都办不到, 因此只能商 1,
从而有 $x + y = z$.

这样便有 $x + z = 2x + y$, 由于左边的和能被 y 整除, 所以 $2x$ 能被 y 整除. 然而 $2x < 2y$ 也表示 $2x$ 连 y 的二倍都达不到, 所以 $2x$ 只能等于 y , 于是有

$$x = x, \quad y = 2x, \quad z = x + y = 3x.$$

因为这些是两两互素的, 所以 x 必为 1, 从而得到唯一的答案 (1, 2, 3).

八十八、一些

素数的和

令 S_n 表示前 n 个素数的和:

$$S_n = 2 + 3 + 5 + \cdots + p_n.$$

试证明在 S_n 与 S_{n+1} 之间一定有一个完全平方数.

解答 $n=1, 2, 3, 4$ 时结论容易验证. 今考虑 $n \geq 5$. 设两个正实数 $x, y (x < y)$ 的平方根跨整数 m 的两侧, 则完全平方 m^2 必在 x 与 y 之间, 即:

若 $\sqrt{x} < m < \sqrt{y}$, 则 $x < m^2 < y$.

如果 $\sqrt{y} - \sqrt{x} > 1$, 则 \sqrt{x} 与 \sqrt{y} 之间的区间必定很宽, 不可避免地会包含一个整数, 无论这整数可能出现在数轴上的何处. 这等于是说

$$\sqrt{y} > 1 + \sqrt{x},$$

$$y > 1 + 2\sqrt{x} + x,$$

$$y - x > 1 + 2\sqrt{x}.$$

下面我们证明: 对任意的 n , 恒有

$$S_{n+1} - S_n > 1 + 2\sqrt{S_n},$$

从而得到题中的结论.

我们曾令

$$S_n = 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + \cdots + p_n.$$

$n \geq 5$ 时, S_n 至少包含了 $2 + 3 + 5 + 7 + 11$, 这里面缺39这个数, 如果我们不要2, 但要把所缺的奇数都囊括进来, 我们至少要多得 $1 + 9 - 2 = 8$, 所以,

$$S_n < 1 + 3 + 5 + \cdots + p_n,$$

右边是从1至 p_n 的全部奇数之和.

从1到 $2k-1$ 的全部奇数之和为

$$1 + 3 + \cdots + (2k-1) = \frac{k}{2} [1 + (2k-1)] = k^2.$$

$p_n = 2k-1$ 时, $k = \frac{1}{2}(1 + p_n)$. 所以从1到 p_n 的全部奇数之和为 $\frac{1}{4}(1 + p_n)^2$. 这样一来

$$S_n < \frac{1}{4}(1 + p_n)^2,$$

因而

$$\sqrt{S_n} < \frac{1}{2}(1 + p_n),$$

换言之

$$2\sqrt{S_n} < (1 + p_n).$$

注意, p_{n+1} 至少必须是 $p_n + 2$ (因为 p_n 与 p_{n+1} 不相邻), 所以

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= p_{n+1} \\ &\geq p_n + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + (1 + p_0) \\
 &> 1 + 2\sqrt{S_0},
 \end{aligned}$$

这就是我们要证明的。

八十九、又一个

古怪的数列

这个问题讲的是产生一个自然数数列的古怪办法，比如我们就从2520开始吧，我们有

$$2520, 25, 11, 12, 8, 7, 8, \dots,$$

数列中各项是这样确定的：把1加到前一项的素因子的和上去，每个素因子在和中出现的次数就是该素因子在素数分解式中的方次数。我们有

$$2520 = 1 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7,$$

所以确定出下一项是

$$1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 5 + 7 = 25,$$

而 $25 = 1 \cdot 5^2$ 又确定了再下一项是 $1 + 2 \cdot 5 = 11$ ，以此类推。

若 n 的素数分解为 $n = p_1 a_1 p_2 a_2 \cdots p_k a_k$ ，则 n 后那一项〔表示成 $f(n)$ 〕就是 $f(n) = 1 + a_1 p_1 + a_2 p_2 + \cdots + a_k p_k$ 。

由于 $f(7) = 8$ ， $f(8) = 7$ ，所以一旦出现了8或7，就会有8, 7, 8, 7...这种无休止的摆动出现。我们的问题就是要证明首项 ≥ 6 的自然数数列一定会包含8或7，因而从某项起就必然出现8, 7, 8, 7...

这样的摆动:

解答 在阐述本问题所用的例子中, 自然数数列从2520才一步就降到了25这么小, 再下一步就降到了更小的数11, 我们不免会认为 $f(n)$ 永远小于 n . 然而12却紧随11, 这表明并非如此. 其实 p 为素数时 $f(p) = p+1$, 不过我们认为一般来讲 $f(n)$ 小于 n 还是正确的. 我们将看到这种数列只有在素数项之后才上升, 而且只增加1, 而在其余的时候(但除开 $n=8$), 数列每一步至少也要减少2:

n 为复合数时, $f(n) \leq n-2$, 但 $n=8$ 除外(对 $n=8$, 只减少1). 从这一结论很快就能推出我们想要的结果.

在推理过程中的某个时候我们必须证明, 当 $n > 6$ 时, 总有 $f(n) > 6$. 检查几个简单情况即可得出这一结论.

(i) 若 n 有大至7这么大的素因子, 那末 $f(n)$ 由于应比 n 的任意素因子大也就大于6. 所以我们只需考虑其素因子为2, 3, 5的数:

$$n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c.$$

(ii) 若 $c \geq 2$, 则 $f(n) \geq 1 + 2 \cdot 5 > 6$.

若 $c = 1$, 那末, 要想 $n > 6$, a, b 之中至少应有一个不是零, 于是 $f(n) \geq 1 + 5 + 2 > 6$. 这样就剩下形式如下的数了:

$n=2^a \cdot 3^b$, 对应于 $c=0$.

(iii) 若 $b \geq 2$, 则 $f(n) \geq 1 + 2 \cdot 3 > 6$. 若 $b=1$, 那末要想 $n > 6$, 必有 $a \geq 2$, 于是 $f(n) \geq 1 + 2 \cdot 2 + 3 > 6$. 这样一来只需考虑形如 $n=2^a$ 的数了:

(iv) 要 $n > 6$, 必须 $a \geq 3$, 于是 $f(n) \geq 1 + 3 \cdot 2 > 6$.

讲到这里, 我们便可以明白整个推论过程是怎么回事了. $n > 6$ 时, $f(n)$ 也大于 6. 大于 6 的素数 p 是奇数, 因而 $f(p) = p + 1$ 为偶数, 亦即复合数. 数列中相邻二项必然呈下列三种类型 (不会有素数项后仍为素数项的情形):

..., 素数, 复合数, ...

..., 复合数, 素数, ...

..., 复合数, 复合数, ...

若相邻二项中任一项是 8, 那就要开始 摇摆 振动了, 此时数列正合乎我们的要求. 因为对于不是 8 的复合数 n , $f(n)$ 至少要减小 2, 所以我们从三种类型看出, 每走两步净减量至少是 1. 例如:

..., 复合数, 素数, ...

—————↑—————↑

至少失去 2 · 得到 1

—————↑

净失至少为 1

因此数列的交错项又给出一个子数列, 在子数列中

只要不出现8，它就是严格递减的数列。然而一切项都 > 6 ，因此终究是会减小到届满：这就意味着到达数目7，于是数列中出现振荡。唯一避免的办法就是让等于例外值8的项出现，使得在一对相邻项上至少净减1的事情不要出现，然而8的出现也要引起振荡，这样一来证明就完备了。剩下还要做的事是证明下述基本性质：

当 n 为复合数，且 $n > 6$ ， $n \neq 8$ 时， $f(n) \leq n - 2$ ，
即对复

合数 $n \geq 9$ ， $f(n) \leq n - 2$ 。

我们应用数学归纳法证明。因为 $f(9) = 7$ ；所以对于数9要证的性质是成立的。今令 n 表示大于9的复合自然数，并把归纳假设叙述为：该性质对一切小于 n 但也 ≥ 9 的复合自然数是成立的。我们证明对数 n 本身这性质也成立。

由于 n 是复合数，它至少有一个非平凡的因子分解

$$n = k_1 k_2, \text{ 式中 } 1 < k_1 \leq k_2 < n.$$

若 k_1 中任一个都是素数，则 $f(k_1) = k_1 + 1$ 。若 k_1 是复合数且至少等于9，则它就在归纳假设的范围内，因而 $f(k_1) \leq k_1 - 2$ 。除此而外， k_1 就是4，6，8中之一， $f(k_1)$ 就分别等于5，6或7。无论属于哪种情形， $f(k_1)$ 都绝不会大于 $k_1 + 1$ ，即

$$f(k_1) \leq k_1 + 1, \quad f(k_2) \leq k_2 + 1.$$

假设

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}.$$

因子分解式 $n = k_1 k_2$ 可以通过把 n 的素因子分成两个非空组而得到:

$$n = \underbrace{(p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_k^{b_k})}_{k_1} \underbrace{(p_1^{a_1-b_1} p_2^{a_2-b_2} \dots p_k^{a_k-b_k})}_{k_2}.$$

一般地我们有

$f(t) = 1 +$ (t 的素因子出现适当多次 数而得的和). 据此, k_1 的素因子重复适当次后得出的和数是 $f(k_1) - 1$. 同样对 k_2 与 n 我们也有 $f(k_2) - 1$, $f(n) - 1$. 然而因为 $n = k_1 k_2$, 故得

$$\begin{aligned} & (n \text{ 的素因子适当重复后相加之和}) \\ &= (k_1 \text{ 的素因子适当重复后相加之和}) \\ &+ (k_2 \text{ 的素因子适当重复后相加之和}). \end{aligned}$$

于是得到

$$\begin{aligned} f(n) - 1 &= f(k_1) - 1 + f(k_2) - 1, \\ f(n) &= f(k_1) + f(k_2) - 1. \end{aligned}$$

因为 $f(k_1) \leq k_1 + 1$, $f(k_2) \leq k_2 + 1$, 所以

$$f(n) \leq k_1 + 1 + k_2 + 1 - 1,$$

$$f(n) \leq k_1 + k_2 + 1.$$

然而我们知道 k_1 和 k_2 都至少等于2, 它们的积至少等于9. 所以我们极易推知乘积

$$(k_1 - 1)(k_2 - 1)$$

至少等于4:

(i) 若 k_1, k_2 有一个取最小值2, 使得 $k_i - 1 = 1$, 那末, 由于 $n = k_1 k_2 \geq 9$, 另一个 $k_i \geq 5$. 此时

$$(k_1 - 1)(k_2 - 1) \geq 1 \cdot 4 = 4.$$

(ii) 若都不取最小值, 即 $k_i \geq 3$, 则 $k_i - 1 \geq 2$, 其积 ≥ 4 .

证明的最后一步要用到一个巧妙的关系, 即

$k_1 + k_2 + 1$ 与 $(k_1 - 1)(k_2 - 1)$ 的关系. 我们有

$$\begin{aligned} (k_1 - 1)(k_2 - 1) &= k_1 k_2 - k_1 - k_2 + 1 \\ &= k_1 k_2 - (k_1 + k_2 + 1) + 2. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + 1 &= k_1 k_2 + 2 - (k_1 - 1)(k_2 - 1) \\ &= n + 2 - (k_1 - 1)(k_2 - 1). \end{aligned}$$

根据前面的不等式, 我们有

$$\begin{aligned} f(n) &\leq k_1 + k_2 + 1 \\ &= n + 2 - (k_1 - 1)(k_2 - 1). \end{aligned}$$

由于 $(k_1 - 1)(k_2 - 1) \geq 4$, 我们得

$$f(n) \leq n + 2 - 4,$$

亦即

$$f(n) \leq n - 2.$$

九十、椭圆 与格子

把半径为5的圆放到一个(单位方)格上去, 无论如何放法它都必然会覆盖住某个格点, 因为它大了一点. (我们把提到的图形都当成是包含边界的, 换句话说 是闭的.) 当然啰, 如果圆很小, 那就会一个格点也盖不住. 由于平面的每个点距离格点至多为 $\sqrt{2}/2$. ($\sqrt{2}/2$ 是格子的基本单位方格的对角线的一半), 所以半径 $\geq \sqrt{2}/2$ 的圆的圆心无论落在什么地方, 这圆至少要盖住一个格点. 更困难的问题是证明: 随机地将 $a \times b$ 的矩形放到格子上, 它至少盖住一个格点的充要条件是 $a \geq 1, b \geq \sqrt{2}$. 还有一个复杂的问题是, 证明三角形一定可以至少覆盖一个格点的充要条件是其面积 $\geq c^2/2(c-1)$, 这里 c 是它的最长边的长度. 然而最有趣的问题还是要算椭圆覆盖格点的问题了.

椭圆的形状虽说千差万别. 然而椭圆永远覆盖一个格点的情况不过是, 放在标准位置上(即中心放在原点, 长短轴分别放在坐标轴上)时, 它一定覆盖点 $(1/2, 1/2)$. 试证此定理.

解答 令已知椭圆的方程是 $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. 它遮住点 $(1/2, 1/2)$ 的条件是

$$\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}a^2 \leq a^2b^2, \text{ 或者 } a^2 + b^2 \leq 4a^2b^2.$$

定理所说的就是, 椭圆至少遮住一个格点的充要条件为

$$a^2 + b^2 \leq 4a^2b^2.$$

(a) 充分性:

设 $a^2 + b^2 \leq 4a^2b^2$. 我们考虑由 u, v 轴确定的

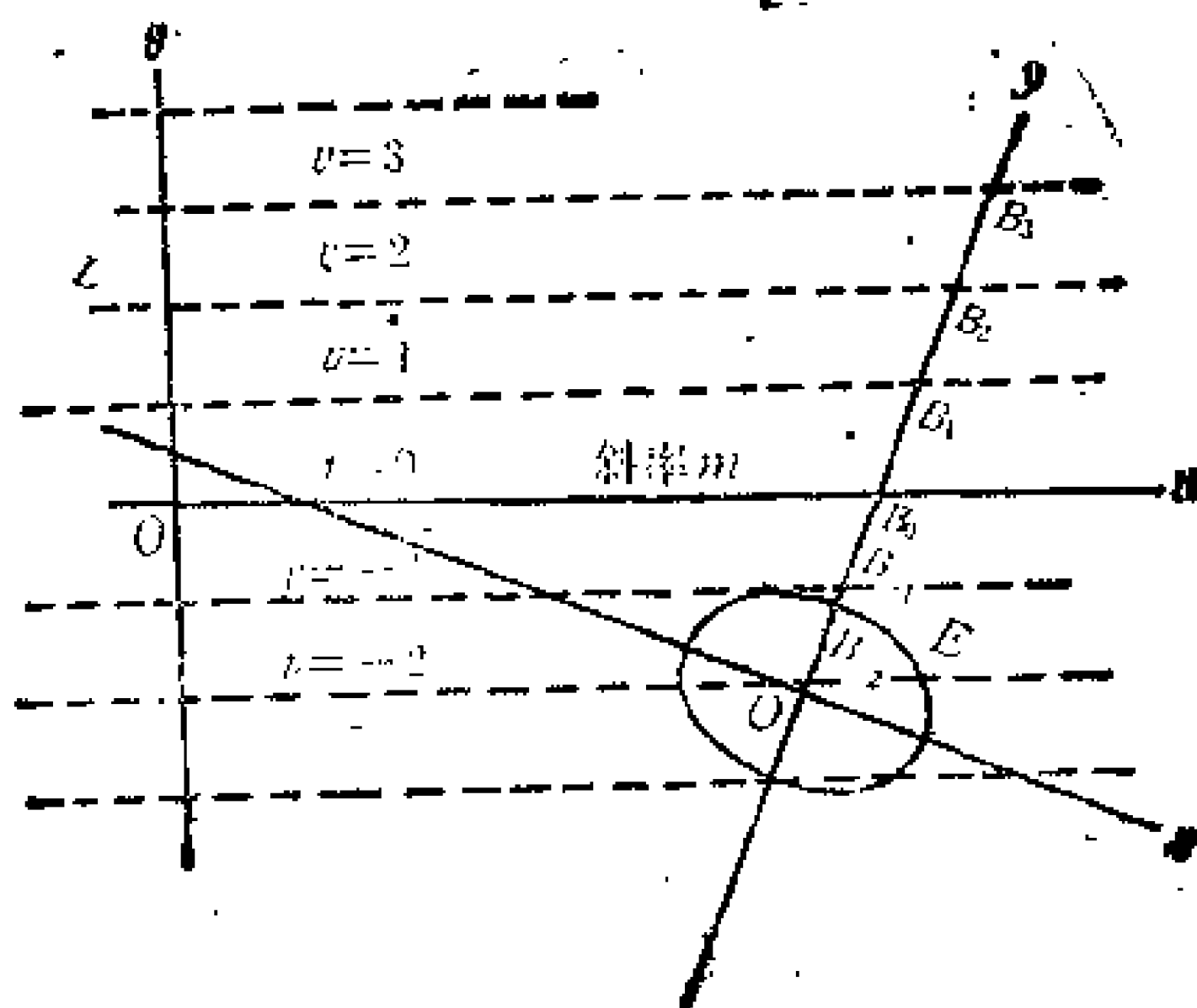


图95

点 (u, v) 构成的一个(单位正方)格子 L . 将椭圆 E 放到 L 上, 任其落在何处(图95). 我们想把 E 的轴作为坐标轴, 使用解析方法. 关于参考架 xy , E 就处于标准位置, 其方程为 $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. L 的格子线可以以任何角度出现在我们的 xy 平面上. 由于相互垂直的轴 u 和 v 指向四面八方, 必有一条轴具有斜率 m (相对于 xy 系), m 的取值范围为 $-1 < m \leq 1$. 今设 u 轴的斜率为 m . L 的格子线 $v = n$ (整数)组成 xy 系中一组斜率为 m 的等距平行线, 并与 y 轴相交于一组等距离点 B_n . 我们要作的第一件事就是求 y 轴上相邻二交点间的距离 $B_n B_{n+1}$.

在过原点 O , 斜率为 m 的直线 T 上取一点 P , 令其横坐标为1(图96). 令 P 的纵标为 PN . 由于斜率 $m = PN/ON$, 故 $PN = m$, $OP = \sqrt{1+m^2}$. 作垂线 $B_{n+1}S$ 垂直于 $v = n$. 由于同位角 $B_{n+1}B_nS$ 与 B_nOP 相等, 所以它们的余角 $SB_{n+1}B_n$ 与 PON 相等. 因此两三角形 $B_{n+1}B_nS$ 和 PON 全等($B_{n+1}S = ON = 1$), 于是得到所求的

$$B_{n+1}B_n = OP = \sqrt{1+m^2}.$$

诸点 B_n 以步距 $\sqrt{1+m^2}$ 沿 y 轴分布, 因之必有一点 $B_n = (0, y)$ 出现, 其 y 值满足 $-\frac{1}{2}\sqrt{1+m^2}$

$< y \leq \frac{1}{2}\sqrt{1+m^2}$, 这是将某一步的两端对称地摆

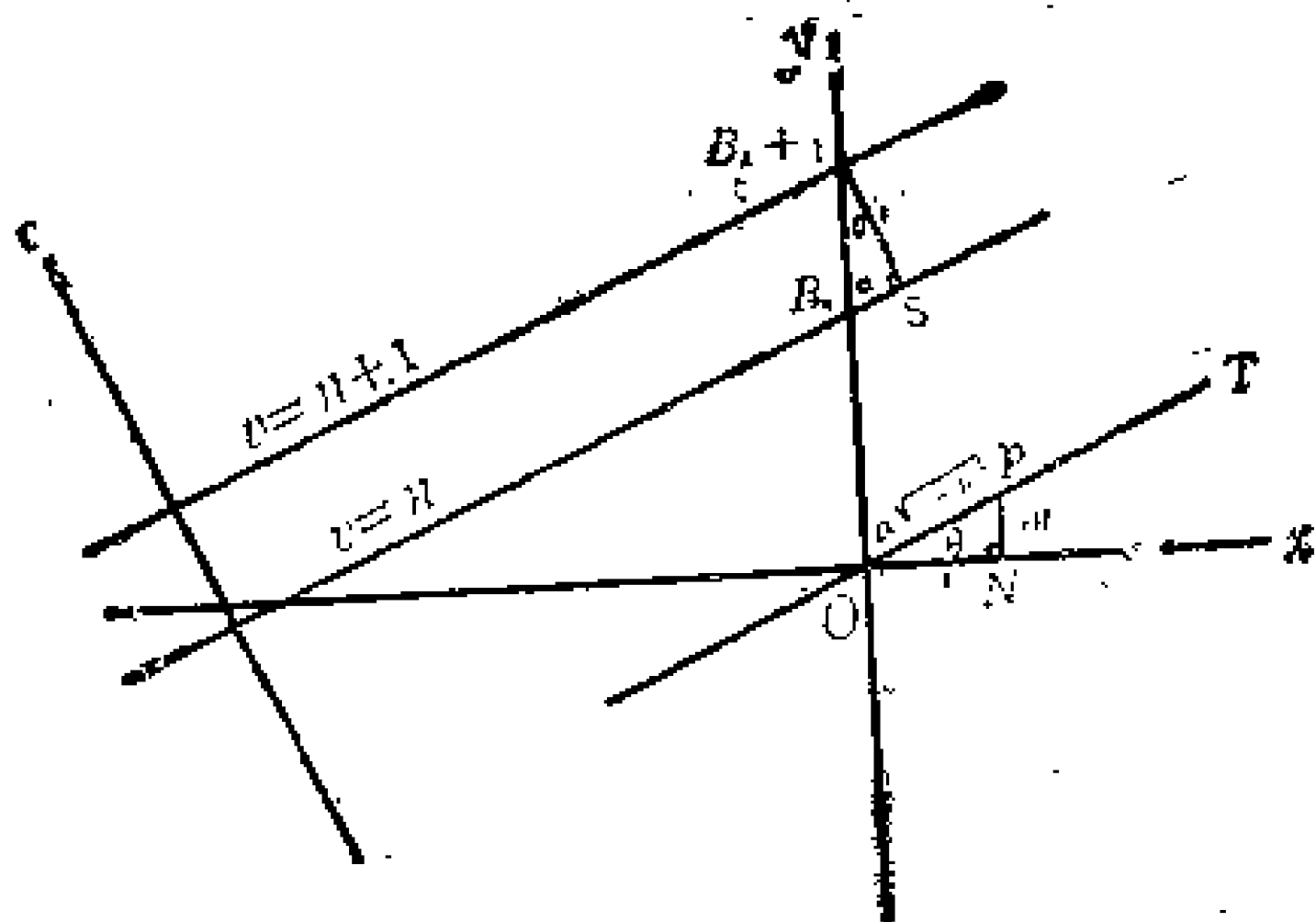


图 96

在 origin 两侧而得到的 (这区间太宽, B_0 无法全部跨过) (图 97). 若 B_0 的坐标是 $(0, k)$ 则格点的直线 L_0 (L 中的 $v = n$) 的方程为

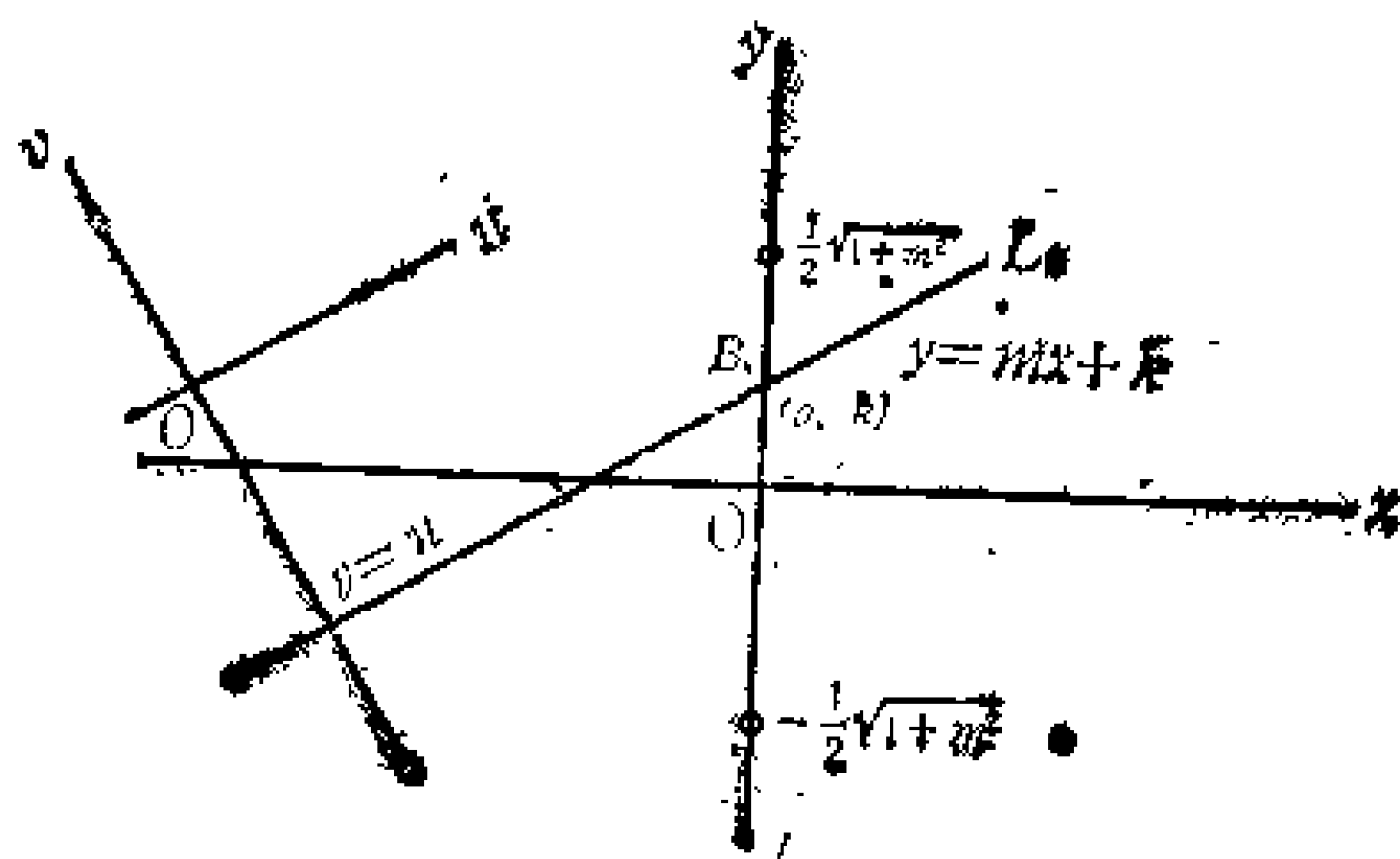


图 97

$$y = mx + k, \text{ 式中 } -\frac{1}{2}\sqrt{1+m^2} < k$$

$$\leq \frac{1}{2}\sqrt{1+m^2},$$

但在这一点并不能保证 L_0 与椭圆 E 相交. 不过, 通过解方程我们得知

$$y = mx + k,$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

$$b^2x^2 + a^2(mx + k)^2 = a^2b^2,$$

最后得

$$x = \frac{-mka^2 \pm ab\sqrt{b^2 + a^2m^2 - k^2}}{b^2 + a^2m^2}$$

由于 E 遮住点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 故有 $a^2 + b^2 \leq 4a^2b^2$, 因

而有 $\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} \leq 4$, 进而得知 $\frac{1}{b^2} < 4$, $\frac{1}{a^2} < 4$, 这是因

为 a, b 均不为零的缘故. 所以我们有 $b^2 > \frac{1}{4}$, $a^2 >$

$\frac{1}{4}$. 结果得

$$k^2 \leq \left(\frac{1}{2}\sqrt{1+m^2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1+m^2)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{m^2}{4} < b^2 + a^2m^2$$

于是根号下的 $b^2 + a^2m^2 - k^2$ 为正, 这表明 L_0 的确与椭圆 E 相交.

现在我们来求椭圆 E 在 L_n 上截出的线段的长度 d .若能证明 d 至少等于1,那末 L_n 上按单位距离分布的格点至少有一个会落入 E 内.

令 x_1 与 x_2 表示 E 与 L_n 的交点的横坐标.由于 L_n 的方程是 $y=mx+k$,故交点就是 $(x_1, mx_1+k), (x_2, mx_2+k)$.

所以

$$\begin{aligned} d^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (mx_2 - mx_1)^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 (1 + m^2) \end{aligned}$$

先前已经求解过交点了,我们知道 x_1 与 x_2 各为

$$\frac{-mka^2 \pm ab\sqrt{b^2 + a^2m^2 - k^2}}{b^2 + a^2m^2}.$$

其差的平方就等于

$$\begin{aligned} &\left[\frac{2ab\sqrt{b^2 + a^2m^2 - k^2}}{b^2 + a^2m^2} \right]^2 \\ &= \frac{4a^2b^2(b^2 + a^2m^2 - k^2)}{(b^2 + a^2m^2)^2} \end{aligned}$$

因此

$$d^2 = \frac{4a^2b^2(b^2 + a^2m^2 - k^2)(1 + m^2)}{(b^2 + a^2m^2)^2},$$

$$\begin{aligned} &d^2(b^2 + a^2m^2)^2 \\ &= 4a^2b^2(b^2 + a^2m^2 - k^2)(1 + m^2). \end{aligned}$$

两端分别减去 $(b^2 + a^2m^2)^2$ 得

$$(d^2 - 1)(b^2 + a^2m^2)^2$$

$$= 4a^2b^2(b^2 + a^2m^2 - k^2)(1 + m^2) - (b^2 + a^2m^2)^2.$$

如果证明了上式右端非负，那末便可得到结论： $d^2 - 1 \geq 0$ ，即 $d \geq 1$ ，这就是想要证明的。

由 $0 \leq (a-b)^2$ 得 $2ab \leq a^2 + b^2$ 。因为有

$$\boxed{a^2 + b^2 \leq 4a^2b^2}$$

故 $2ab \leq 4a^2b^2$ ，从而 $1 \leq 2ab$ 。所以 $1 \leq 2ab < a^2 + b^2$ ，因而

$$\boxed{a^2 + b^2 - 1 \geq 0}$$

然而我们还有 $k^2 \leq (1 + m^2)/4$ ，所以

$$\begin{aligned} & 4a^2b^2(b^2 + a^2m^2 - k^2)(1 + m^2) - (b^2 + a^2m^2)^2 \\ & \geq 4a^2b^2(b^2 + a^2m^2 - \frac{1 + m^2}{4})(1 + m^2) \\ & \quad - (b^2 + a^2m^2)^2 \\ & = (m^4a^2 + b^2)(4a^2b^2 - a^2 - b^2) + 4m^2a^2b^2 \\ & \quad (a^2 + b^2 - 1) \end{aligned}$$

上式最末一步的正确性可以直接乘出来加以检验
由上面各不等式得

$$4a^2b^2 - a^2 - b^2 \geq 0, \quad a^2 + b^2 - 1 \geq 0.$$

所以结果是非负的，充分性因此得证。

(b) 必要性

现在假设 E 总是遮住一个格点，很容易看出 E 处于标准位置时必定遮住点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 。

反之，假设椭圆 E 不覆盖格点，我们作坐标平移，把原点移至点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 。这样作的效果就是把格子的基本单位平方格的中心与格点进行了交换（图98）。若某一区域遮住格点 (x, y) ，那末经平移后这个区域就要遮住中心，反之亦然。如果 E

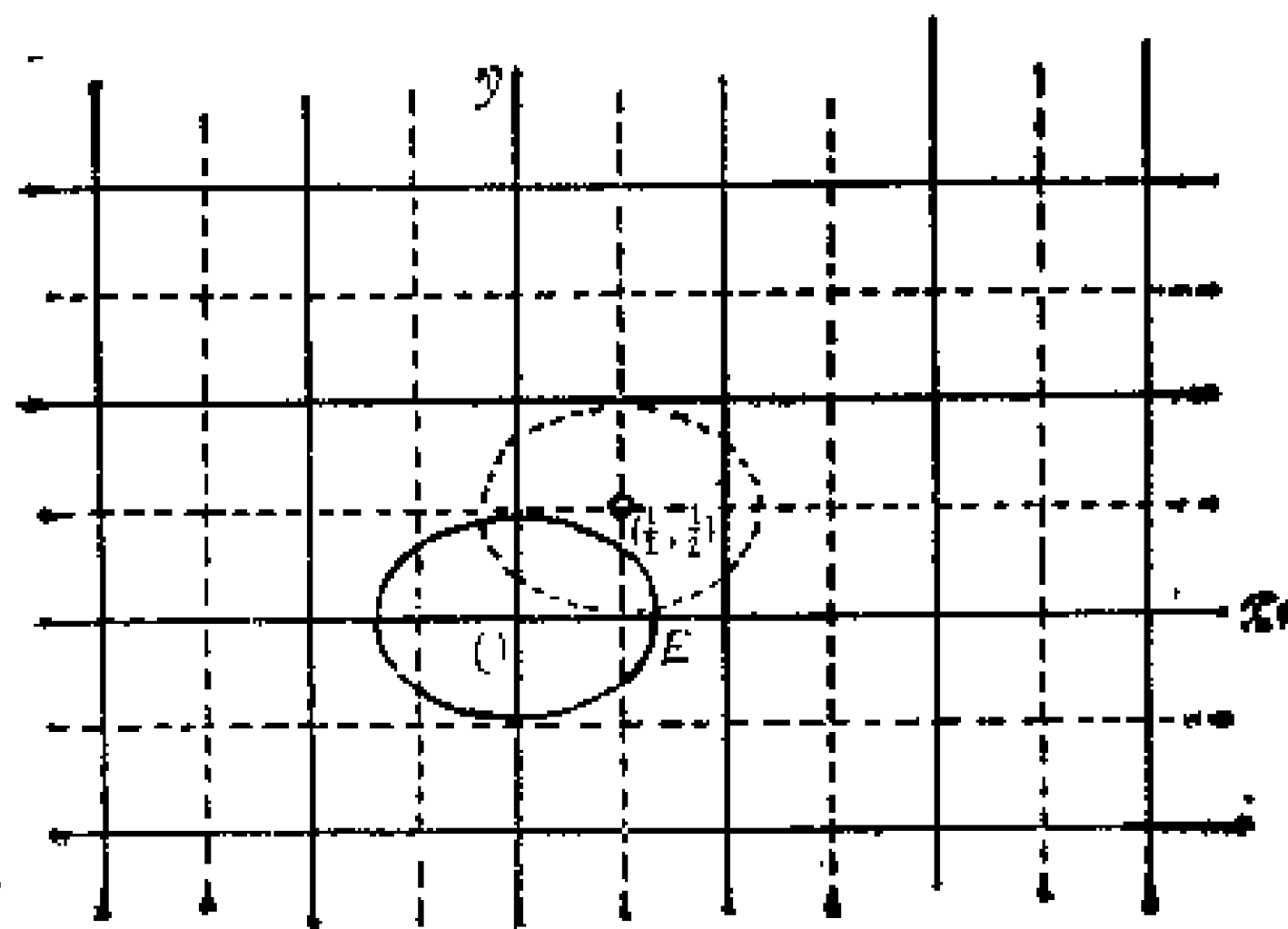


图 98

未能遮住中心 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ，那末由于 E 具有对称性，它也就不能遮住任何单位方格的中心，所以平

移以后 E 就遮不住任何格点，这与下述给出的性质冲突： E 至少总要覆盖单位方格（这时就是中心相同的格子）的一个格点，所以 E 一定遮住点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ，于是定理得到证明。

九十一、阿基米德 三角形

伟大的阿基米德 (Archimedes) 的一件卓越功绩是算出抛物线弓形 (即弦所截下的一部分) 的面积. 他得出弦 AB 上的弓形面积是在 A, B 两点的切线所确定的 $\triangle PAB$ 的面积 $\frac{2}{3}$. PAB 这种三角形叫阿基米德三角形 (图99).

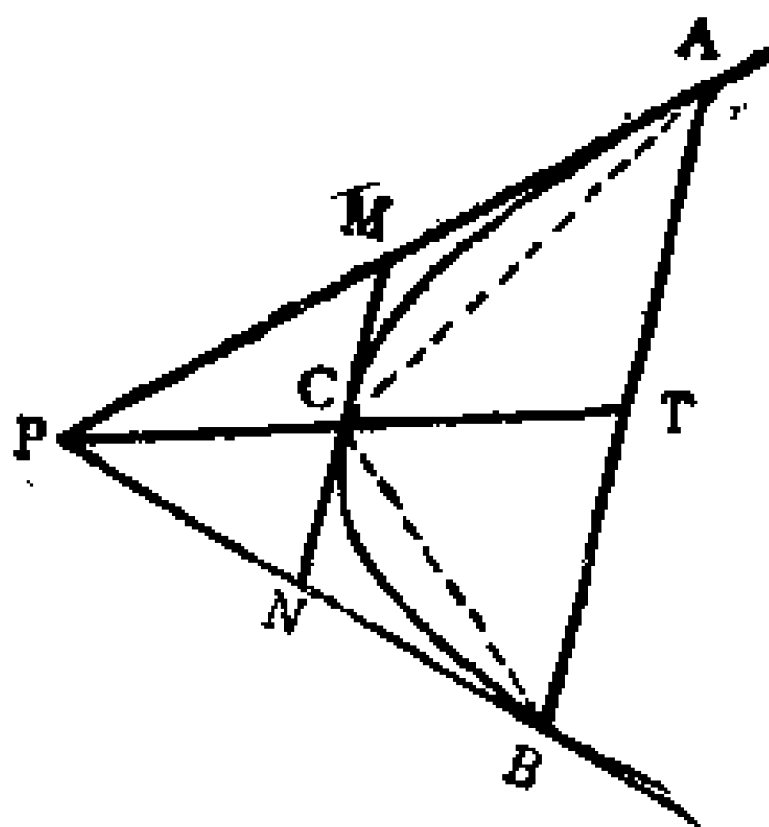


图 99

可证明, 以阿基米德三角形中弦的中线 PT 平行于抛物线的轴, 在 PT 与抛物线的交点 C 处抛物线的切线 MCN 平行于弦 AB . 并且还可以证明 M 与 N 分别是 PA 与 PB 的中点. 因此三角形 CAB 的底

与 $\triangle PAB$ 的底相同，但高却只有 $\triangle PAB$ 的高的一半，所以 $\triangle CAB = \frac{1}{2} \cdot \triangle PAB$ 。结果得

$$\text{抛物线弓形} = \frac{2}{3} \triangle PAB = \frac{4}{3} \triangle CAB.$$

已知有一个三角形是三条抛物线的阿基米德三角形，每条抛物线在三角形的（两个）顶点处与三角形的两边相切。一个阿基米德三角形加上它的三条抛物线所组成的图形有许多有趣的性质（图100）。

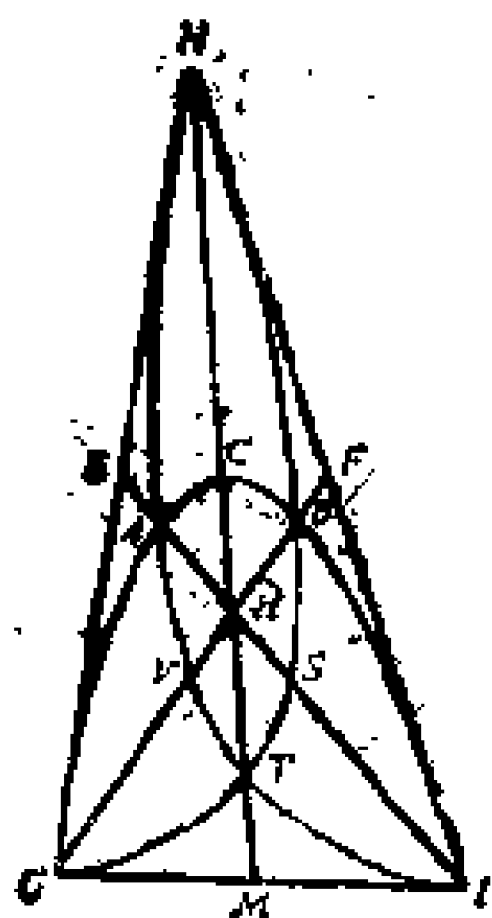


图 100

(i) 抛物线互相间总是交于三角形的中线上（比如， NTM 就是一条中线）。

(ii) 这些交点总是在中线的 $1/9$ 处（从边上的中点算起）。〔例如， $MT = \frac{1}{9} MN$ ，即 $MT:TN = 1:8$ 〕

(iii) 三条抛物线与其间的中线 把 三角形分成了18份，其中有12部份都是由两条线段与一段弧围成的，另外6份是由一条线段与两段弧围成的。这12份每份面积都一样，等于三角形面积的 $\frac{5}{162}$ ，另外那6份每份面积也一样，等于三角形面积的 $\frac{17}{162}$ 。

(iv) 在抛物线的一个交点（例如*T*）处的两条切线三等分邻边（例如*P*，*Q*三等分*GI*），如图101。

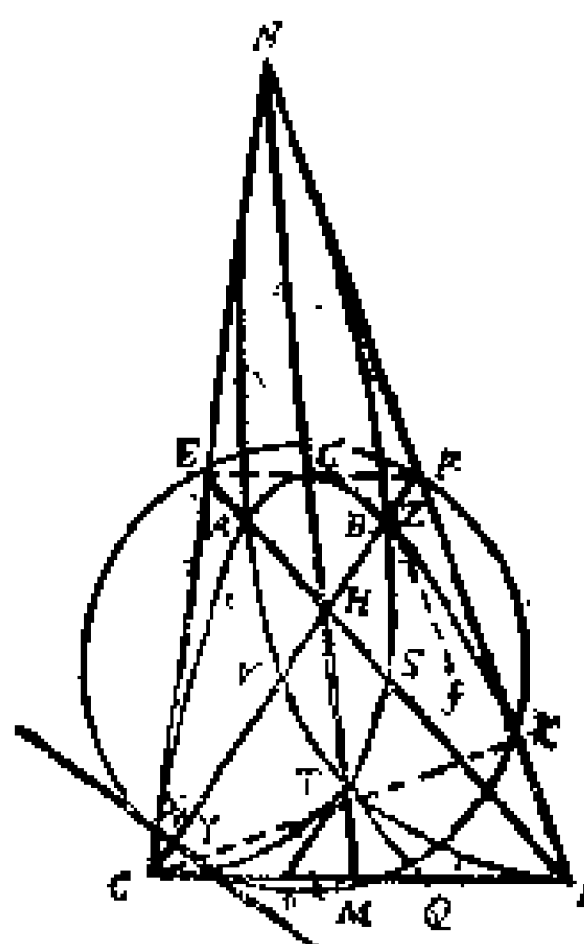


图 101

(v) (经过三边中点的)九点圆与同一顶点引出的中线和高三(例如*GF*与*GK*)相交于两点(*X*与*Y*)，这两点确定的直线与该中线垂直；这也就使得此直线也与(相应的)抛物线垂直，从而平行于准线。其实这条线(*XY*)就是准线。

(vi) 过焦点*f*平行于三角形非切线边的一条直

线在该边的中线上截下一条线段 (ZF), 此线段等于中线上顶点 (G) 到准线的距离 (即 $GX = ZF$).

在本节中我们考虑性质 (i), (ii), 以及 (iii) 的一半, 作为本书数学趣谈的结束.

(i) 与 (ii). 如果证明了把中线 MN 分成 $1:8$ 的点 W 在与边 GI 相切的两条抛物线上, 也就一起证明了这两条性质 (图102). 由于这些抛物线的情况都是等价的, 所以我们只考虑过 N 与 I 的抛物线, 假设它的方程是 $y^2 = x$; N 与 I 的坐标分别为 (k^2, k)

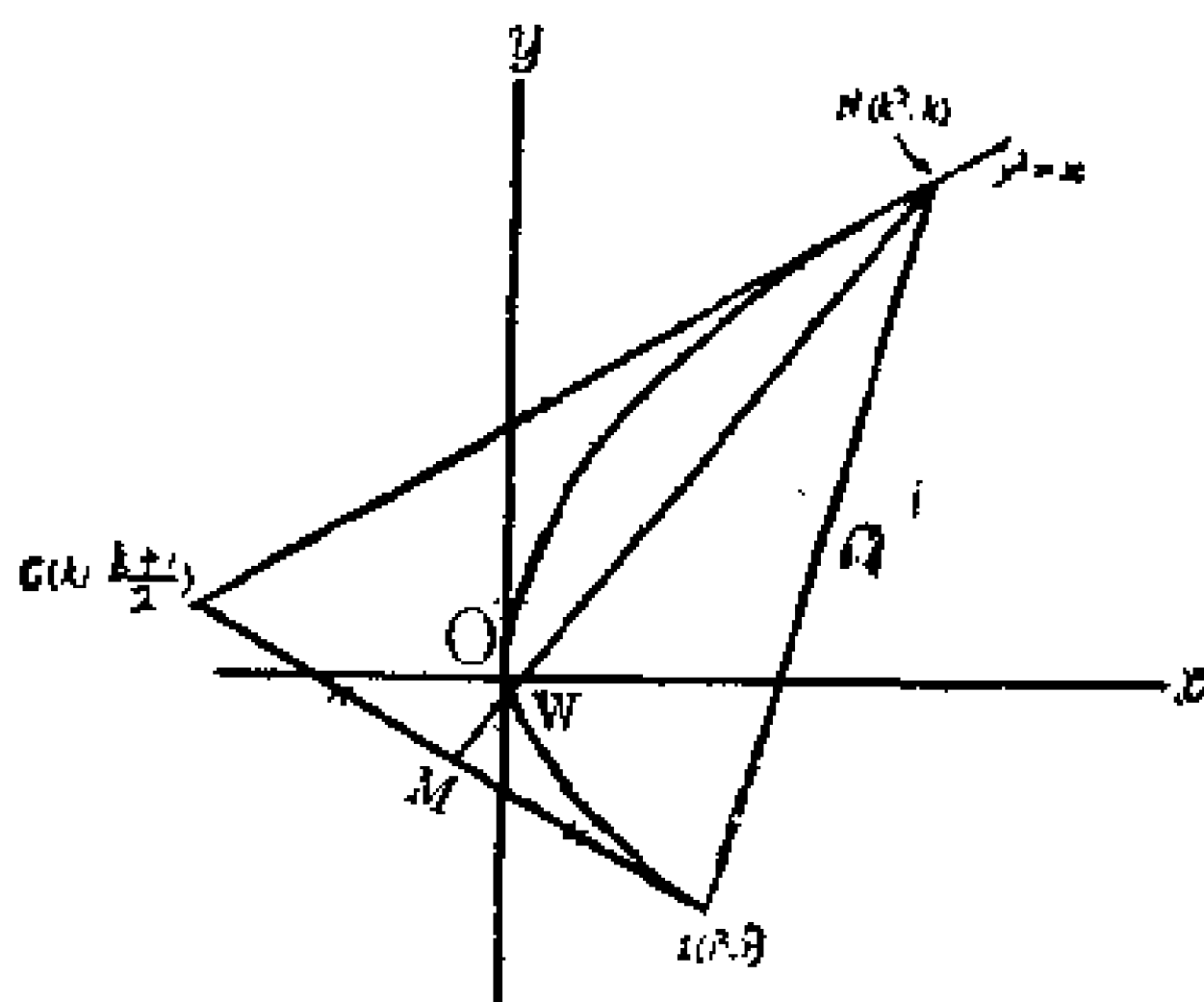


图 102

和 (t^2, t) . 那末切线 GN 与 GI 的方程就是

$$x - 2ky + k^2 = 0, \quad x - 2ty + t^2 = 0.$$

解出 G 的坐标为 $(kt, \frac{k+t}{2})$. (顺便提一句, G 的纵标 $(k+t)/2$ 与 NI 中点的纵标一样, 这表明弦 NI

的中线与抛物线的轴平行.)

GI 的中点 M 是 $\left(\frac{t(k+t)}{2}, \frac{k+3t}{4} \right)$. 按 $1:8$

的比例分割 MN 的点是

$$\left(\frac{k^2 + 8\left(\frac{t(k+t)}{2}\right)}{9}, \frac{k + 8\left(\frac{k+3t}{4}\right)}{9} \right),$$

亦即

$$\left(\frac{1}{9}[k^2 + 4t(k+t)], \frac{1}{9}[k + 2(k+3t)] \right).$$

对于此点有

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{1}{81} [k + 2(k+3t)]^2 = \frac{1}{81} (3k + 6t)^2 \\ &= \frac{1}{9} (k + 2t)^2 = \frac{1}{9} (k^2 + 4kt + 4t^2) \\ &= \frac{1}{9} [k^2 + 4t(k+t)] = x, \end{aligned}$$

这表明它在抛物线上.

(iii) 形心 H 三分中线 EI 与 FG . 由于 $EA = \frac{1}{9} EI$, 所以 $EA = \frac{1}{3} EH$. 同样 $FB = \frac{1}{3} FH$. 所以 AB 平行于 EF . 前面提到过, EF 与过 G, I 两点的抛物线相切于点 C , 此点是中线与抛物线的交点.

试回忆一下抛物线的“直径”的性质(图103):

一组平行弦中点的轨迹是一条直线, 名叫直径, 抛物线的直径都平行于抛物线的轴; 又, 直径“端点”处的切线平行于直径所平分的一组弦. 所

以，从抛物线上一 点 P 作出的平行于轴的直线 PQ 平分一切与 P 点处切线平行的弦。

我们刚才看到了，弦 AB 平行于切线 ECF ，而 CO 由于是中线的一部分而与抛物线的轴相平行（图 104）。故 CO 是直径，因而平分所有平行于 EF （和 AB ）的弦。于是最终得知 CO 平分弓形 ABC 的面积。 AB 是被 CO 平分的弦之一。因此 OH 平分 $\triangle ABH$ ，于

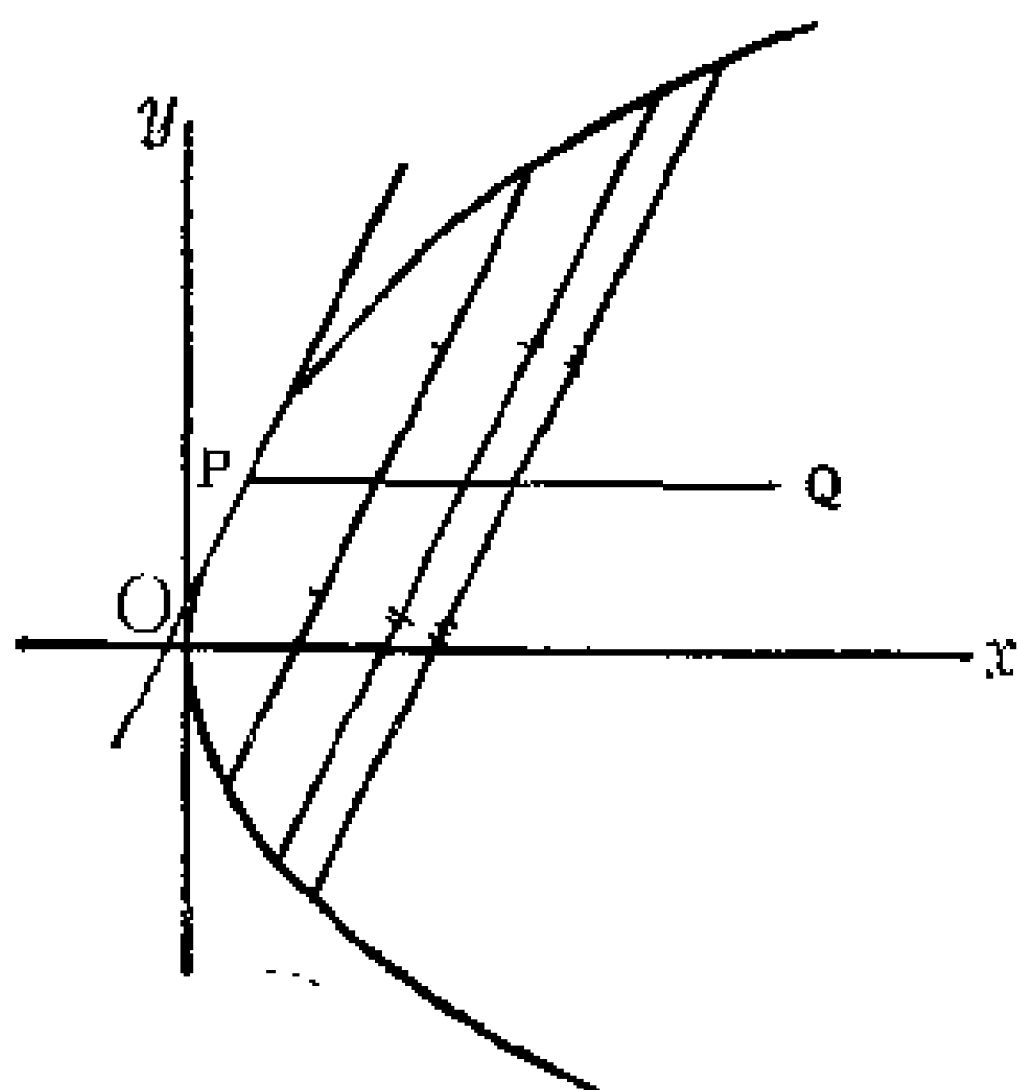


图 103

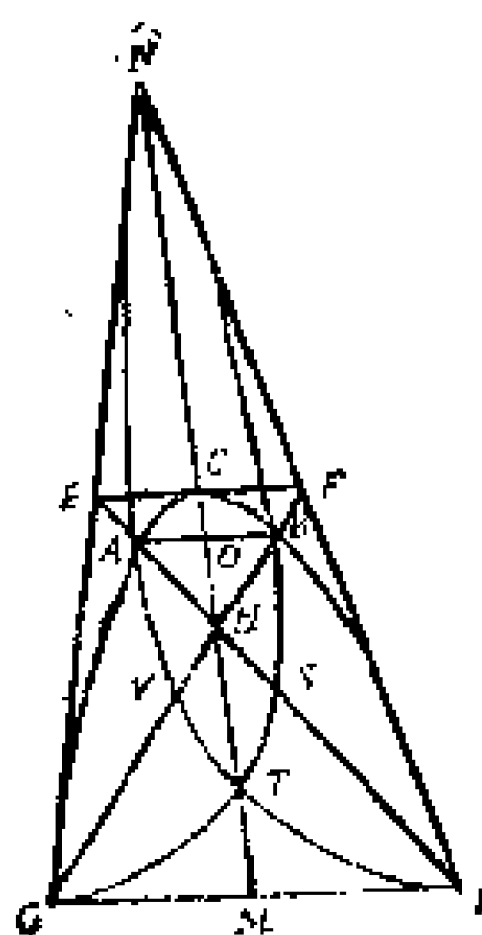


图 104

是 CH 平分 $AHBC$ ，所以 AHC 的面积 $=\frac{1}{2}AHBC=\frac{1}{2}$ （弓形 $ABC + \triangle ABH$ ）。下面计算弓形 ABC 和 $\triangle ABH$ 的面积。

因为 EF 与 AB 平行，三角形 EFH 就与三角形 ABH 相似，故有

$$\frac{\triangle ABH}{\triangle EFH} = \left(\frac{AH}{EH}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9},$$

$$\triangle ABH = \frac{4}{9} \triangle EFH.$$

EF 也平行于 GI ，因而 $\triangle EFH$ 和 $\triangle HGI$ 相似。

由于相应边的比为 $\frac{1}{2}$ ，所以

$$\triangle EFH = \frac{1}{4} \triangle HGI.$$

然而由形心 H 三等分中线 MN ，根据相似三角形可推知， $\triangle HGI$ 与 $\triangle NGI$ 的 GI 边上的高之比也是 $1:3$ ，因此 $\triangle HGI$ 是 $\triangle NGI$ 的三分之一，故有

$$\triangle EFH = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} \triangle NGI \right) = \frac{1}{12} \triangle NGI,$$

由此得

$$\begin{aligned} \triangle ABH &= \frac{4}{9} \triangle EFH = \frac{4}{9} \left(\frac{1}{12} \triangle NGI \right) \\ &= \frac{1}{27} \triangle NGI. \end{aligned}$$

末了，弓形 $ABC = \frac{4}{3} \triangle ABC$ 。因为 A 与 B 按 $1:2$ 的比例分割 EH 与 FH ，所以平行线 EF 与 AB 之间的距离，即 $\triangle ABC$ 的底 AB 上的高，是 $\triangle ABH$ 中 H 到 AB 的高的一半。因此 $\triangle ABC$ 是 $\triangle ABH$ 的一半，故有

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{1}{2} \triangle ABH = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{27} \triangle NGI \right) \\ &= \frac{1}{54} \triangle NGI. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\text{弓形 } ABC &= \frac{4}{3} \triangle ABC = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{54} \triangle NGI \right) \\ &= \frac{2}{81} \triangle NGI.\end{aligned}$$

于是最终得

$$\begin{aligned}\text{区域 } ACH &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{81} \triangle NGI + \frac{1}{27} \triangle NGI \right) \\ &= \left(\frac{1}{81} + \frac{1}{54} \right) \triangle NGI \\ &= \frac{5}{162} \triangle NGI.\end{aligned}$$

练习

有关各题及其解的线索注于题后

1. 客车比货车快 x 倍, 客车同向走时赶上货车所花时间是反向走时它赶上货车所花时间的 x 倍. 求 x . (AMM, 1960, p. 475, 问题E1386.)

2. 已知两圆, 从各圆心向另一圆作切线 (图 105). 证明在两圆上截出的弦相等. (AMM, 1933, p. 456.)

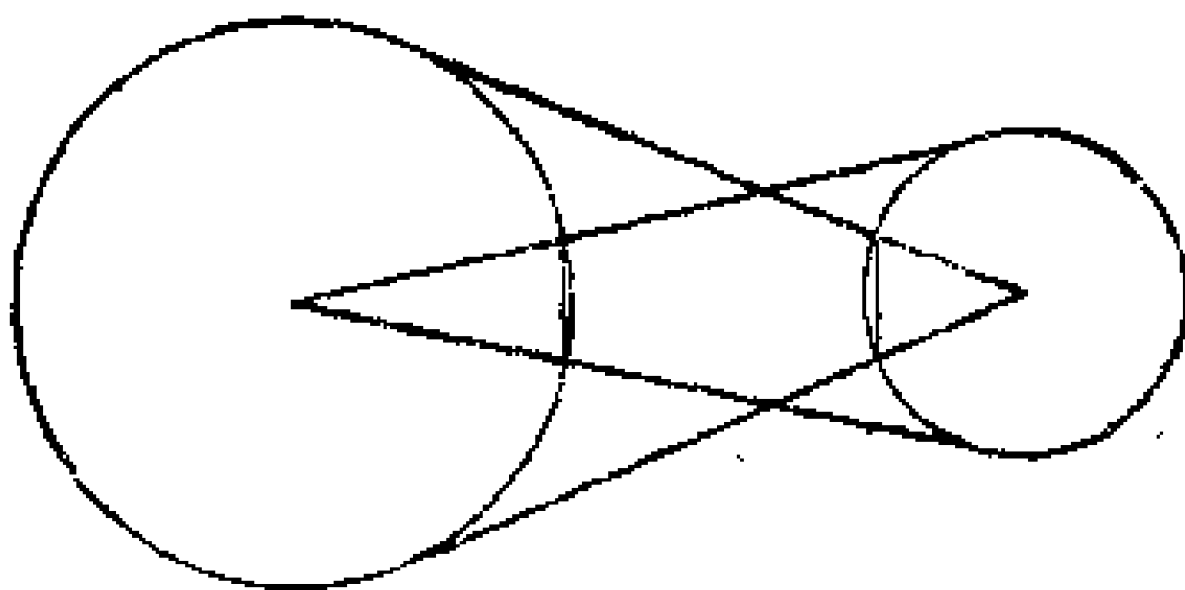


图 105

3. 求各位数字和不能整除各位数字立方和的最小自然数. (AMM, 1948, p. 579, 问题E802.)

4. 具有铅直轴 (即与 y 轴平行的轴) 的抛物线上有三点 A, B, C . A 点处切线斜率是 m_A , 弦 AB 的斜率是 m_{AB} , 等等. 试证下列奇特性质:

$$m_A = m_{AB} + m_{AC} - m_{BC}.$$

(AMM, 1965, p. 667, 问题E1701.)

5. 试证 3×3 幻方的“幻方常数”恒为3的倍数.
(AMM, 1897, p. 189.)

6. 有个人得到一张多少多少元多少多少分的支票, 兑现时出纳员把应付的分数付成了元, 而把元数付成了分. 后来他用去了3.50元后才发觉手头的钱是他支票上的钱数的两倍. 请问支票面额是多少? (AMM, 1941, p. 212, 问题E430.)

7. 证明任意四面体中必然至少有一个顶点, 在该处的面角均为锐角. (AMM, 1935, p. 453, 问题E141.)

8. 已知 $f(x)$ 为一整系数多项式, a 为奇数, b 为偶数, 且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 均为奇数, 证明 $f(x) = 0$ 无整数根. (AMM, 1960, p. 760, 未解决.)

9. 设 P 为简单多面体, P 无任何顶点刚好有三条棱相交. 试证 P 至少有八个面是三角形 (AMM, 1951, p. 421, 问题E945.)

10. 设 a 与 n 都是自然数, $n > 1$, 证明任何幂 a^n 都是 a 个连续奇数之和. (AMM, 1947, p. 165, 问题E726.)

11. 一条定长弦在已知圆内滑动, 弦的端点垂直投影到圆的一条固定直径上. 端点在直径上的投影与弦的中点组成一个三角形. 证明这个三角形是等腰三角形, 且其形状不随弦在圆内的滑动而变

化.(AMM, 1936, p.186, 问题E171.)

12. 甲报出一个01到99之间的二位数, 乙把这个数的数字反过来, 再加上数字之和, 然后报给甲, 甲重报此结果, 然后照先前那样作下去. 所有出现的数都要按模100来化简, 使得所报之数只是二位数. 要想乙在某个时候报出00, 试问甲第一次报什么数.(AMM, 1949, p.105, 问题E816.)

13. 证明5个偶数数字或奇数数字, 无论怎样排列都排不出一个平方数.(AMM, 1937, p.248, 问题E232.)

14. 过两个定点作变动的圆与一定圆相交, 证明定圆与变圆的所有公共弦共点.(AMM, 1895, p.17, 问题32.)

15. 试求一年中出现“13号是星期五”的最小和最大数目.(AMM, 1963, p.759, 问题E1541.)

16. 试求两个自然数, 使其和为其积的因子.(AMM, 1961, p.804, 问题E1452.)

17. 已知一个圆心为 O 的圆, 以及不在圆周上的一点 P , 过 P 作一直线交此圆于两点, 过这两点作圆的切线. 这两条切线与过 P 点垂直于 OP 的直线相交于 C, D , 证明 P 为 CD 的中点.(Mathematics News Letter (Mathematics Magazine的前身), 1933-34, p.170, 问题32.)

18. 证明, 对 $n=1, 2, 3, \dots$ 有

$(1^6 + 2^6 + \dots + n^6) + (1^7 + 2^7 + \dots + n^7) =$
 $2(1 + 2 + \dots + n)^4$. (AMM, 1915, p. 99, 问题 419.)

19. 证明: 从三角形的三条高的垂足向另外两边作垂线, 所得的六个垂足共圆. (这叫三角形的泰勒 Taylor 圆) (NMM, 1943-44, p. 40, 问题 458.)

20. 证明: 如果知道一个自然数的全部因子之积, 那末可以唯一地确定该自然数. (MM, 1964, p. 57, 问题 518.)

21. 证明: 如果在三角形中有两条中线互相垂直, 那末三条中线是一直角三角形的边, 并且斜边就是第三条中线. (AMM, 1902, p. 164, 问题 177.)

22. 设 f_n 是一个数列的第 n 项, 定义成 $f_n = -f_{n-1} - 2f_{n-2}$, $f_1 = 1$, $f_2 = -1$. 试证 $2^{n+1} - 7f_{n-1}^2$ 永远是个完全平方数. (AMM, 1973, p. 696, 问题 E2367.)

23. 农夫琼斯有一辆方轮车, 不过这也适合他的需要了, 因为他会用这辆车走搓板公路而不颠簸. 假定轮子不滑动, 试描述搓板公路路面的形状. (AMM, 1965, p. 82, 问题 E1668.)

24. 试求 r 的一切值, 使得没有任何 $n!$ 末尾正

好是 r 个零. (MM, 1953, p. 54, 问题158.)

25. 设一个圆的圆心 C 在等轴双曲线上, 且此圆又通过双曲线上的一点 P , 这点是 C 关于原点的对称点, 证明圆与双曲线的其余三个交点永远组成一个等边三角形 (图106). (NMM, 1943—44, p. 247, 问题531.)

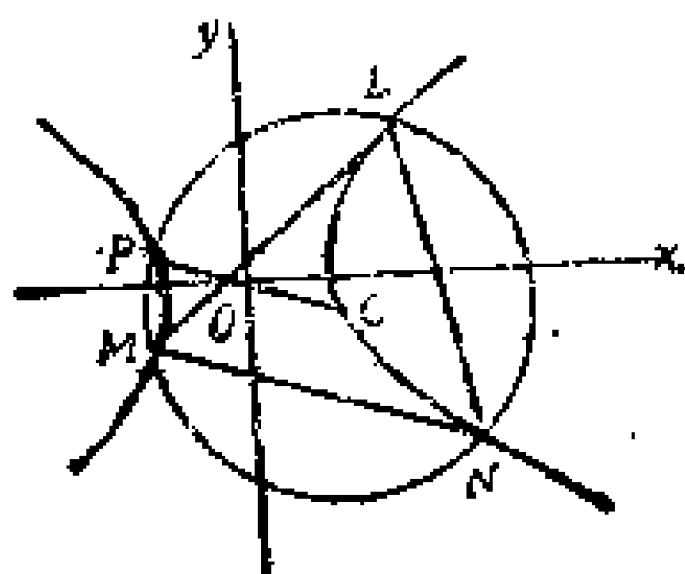


图 106

习题分类索引

I 代数，算术，数论，数列，概率

问题编号	题目	页数
四	渡船.....	(9)
六	司机问题.....	(14)
十	$\cos 17x = f(\cos x)$	(24)
十五	4444^{4444} 的位数.....	(36)
十六	方程 $\sigma(n) + \varphi(n) = n \cdot d(n)$	(38)
十八	极小和.....	(43)
十九	7^{9999} 的最后三位数.....	(46)
二十	掷骰子 (一)	(48)
二十二	二重序列.....	(51)
二十六	a^b 与 b^a	(68)
二十七	一则趣味数学题.....	(70)
三十	联立丢番图方程.....	(82)
三十三	雪球.....	(90)
三十四	从1到10亿.....	(92)
三十六	一个丢番图方程	(101)
三十七	斐波那契数列	(104)

四十	完全数	(115)
四十一	四边形的边	(118)
四十二	算术级数中的素数	(120)
四十四	牛和羊	(116)
四十五	平方序列	(129)
四十九	关于 $\pi(n)$	(139)
五十二	掷骰子 (二)	(148)
五十三	古怪的数列	(150)
五十四	长长的相邻自然数串	(155)
五十六	三角形数	(162)
五十八	费马数	(173)
五十九	一个倒数不等式	(177)
六十	完全四次方	(178)
六十二	红球与绿球	(187)
六十三	算术级数中的复合数项	(189)
六十五	测验	(194)
六十七	又一个丢番图方程	(201)
六十八	复数的一个不寻常的性质	(203)
七十	完全平方数末尾的重复数字	(209)
七十二	不等式组	(213)
七十四	再谈完全平方数	(217)
七十五	奇怪的多项式	(222)
七十七	容易求出的余式	(228)
七十八	3的一个奇特性质	(229)

八十	永远是平方	(232)
八十一	将自然数分组	(234)
八十三	通过排列得出的分数	(238)
八十四	关于二项式系数	(239)
八十五	费马数 F_{73}	(241)
八十七	自然数的特别三数组	(249)
八十八	一些素数的和	(250)
八十九	又一个古怪的数列	(253)

Ⅱ 组合论, 组合几何 (极大与极小)

一	象棋比赛	(1)
二	n 的有序分解	(4)
三	圆内的区域	(5)
八	给平面着色	(20)
十一	正方形内的格点	(25)
十三	打叉与画图	(32)
二十一	穿刺立方体	(49)
二十三	分点圆	(55)
二十八	球面上的地图	(72)
二十九	平面上的凸区域	(76)
三十二	拆得干净利落的方格棋盘	(85)
三十五	邻接非交叠单位正方形	(93)
三十九	分格点	(112)
四十七	红点与蓝点	(134)

五十一	内对角线的条数·····	(145)
六十一	装方块·····	(180)
六十九	圆链·····	(205)
九十	椭圆与格子·····	(260)

Ⅱ 几何 (极大与极小)

五	鼓半圆·····	(11)
七	屋角的帘子·····	(18)
九	一个显然的极大值·····	(22)
十二	不透明正方形·····	(28)
十四	直角三角形的一个惊奇性质·····	(33)
十七	关于 k 云·····	(41)
二十四	三角形的边长·····	(63)
二十五	请勿使用微积分·····	(64)
三十一	反射切线·····	(85)
三十八	厄尔迪什不等式·····	(109)
四十三	关于彻伐线·····	(123)
四十六	内接十边形·····	(130)
四十八	递尔法·····	(137)
五十	定长弦·····	(143)
五十五	最小内接四边形·····	(158)
五十七	关于正 n 边形·····	(179)
六十四	把等边三角形联结起来·····	(191)
六十六	托勒密定理的一个应用·····	(196)

七十一	一条分割线.....	(211)
七十三	正26边形的一个意想不到的性质	(214)
七十六	形心圆.....	(224)
七十九	正方形内的一个正方形.....	(230)
八十二	边长成算术级数的三角形.....	(236)
八十六	圆内接边形.....	(247)
九十一	阿基米德三角形.....	(269)

[General Information]

□□=□□□□ □□□

□□=

□□=2 8 6

SS□=0

□□□□=

□ □
□ □
□ □
□ □
□ □
□ □